الدرس
1

حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ ومعادلةٍ تربيعيةٍ
Solving a System of Linear and Quadratic Equations

فكرةُ الدرس حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ ومعادلةٍ تربيعيةٍ.

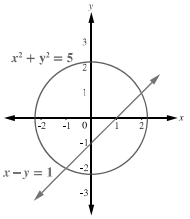
مسألةُ اليوم تُمثِّلُ المعادلةُ $y = x - 3$ طريقًا مستقيمًا داخلَ إحدى المدنِ، في حينِ تُمثِّلُ المعادلةُ $y = x^2 - 3x - 10$ طريقًا آخرَ منحنيًا داخلَ المدينةِ نفسِها. هلْ يتقاطعُ هذانِ الطريقانِ أمْ لا؟

يُمكِنُني حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ باستعمالِ طريقةِ التعويضِ، وذلكَ بكتابةِ أحدِ المُتغيِّرَيْنِ في المعادلةِ الخطِّيةِ بدلالةِ الآخرِ، ثمَّ تعويضِهِ في المعادلةِ التربيعيةِ وحَلِّها.

مثال 1

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$x - y = 1$$
$$x^2 + y^2 = 5$$



يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا (GeoGebra)، أوْ حاسبةٍ بيانيةٍ، لتمثيلِ المعادلتَيْنِ بيانيًّا على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ كما في التمثيلِ البيانيِّ المجاورِ. أُلاحِظُ أنَّ منحنَيَي المعادلتَيْنِ يتقاطعانِ في نقطتَيْنِ؛ ما يعني أنَّ للنظامِ حَلَّيْنِ مختلفَيْنِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:

المعادلةُ الخطِّيَّةُ	$x - y = 1$
بكتابةِ y بدلالةِ x	$y = x - 1$
بتعويضِ قيمةِ y في المعادلةِ التربيعيةِ	$x^2 + (x-1)^2 = 5$
بفكِّ القوسَيْنِ	$x^2 + x^2 - 2x + 1 = 5$
بالتبسيطِ	$2x^2 - 2x - 4 = 0$
بالقسمةِ على 2	$x^2 - x - 2 = 0$

لِحَلِّ المعادلةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ، أُحدِّدُ قيمَ المعاملاتِ: $a = 1, b = -1, c = -2$:

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس بكل من اللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

في ما يأتي بعض المصطلحات التي يمكن التركيز عليها:

المعادلة equation

المعادلة التربيعية quadratic eqation

نظام المعادلات system of equations

الدرس
1

فكرةُ الدرس

- حل نظام مكون من معادلة خطية وأخرى تربيعية.
- حل مسائل رياضية وحياتية باستعمال أنظمة المعادلات.

التعلم القبلي:

- نظام المعادلات وحله.
- عدد حلول النظام.

1 التهيئة

- اكتب نظام المعادلات، الآتي على السبورة: $xy = 10$, $x + y = 7$ واسأل الطلبة:
  - » بماذا يختلف هذا النظام عن ما تعرفونه؟
  - » كيف يمكن حله باعتقادكم؟
- استمع لإجابات أكبر عدد من الطلبة، واسألهم دائما: من يؤيد الإجابة؟ لماذا؟ من لديه إجابة أخرى؟ اذكرها. وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الآخر لديهم.
- ثم وضح لهم أنهم سيتعرفون على حل مثل هذا النظام في هذا الدرس.

2 الاستكشاف

- اطلب إلى الطلبة قراءة (مسألة اليوم، ثم اسألهم:
  - » لماذا عُبِّر عن الطريق المستقيم بمعادلة خطية، وعن الطريق المنحني بمعادلة تربيعية؟ لأن التمثيل البياني للمعادلة الخطية خط مستقيم، والتمثيل البياني للمعادلة التربيعية قطع مكافئ.
  - » هل يمكن معرفة إذا كان الطريقان متقاطعين أم لا؟ نعم، يمكن معرفة ذلك عن طريق التمثيل البياني.
  - » هل يمكن إيجاد نقاط تقاطع الطريقين من دون تمثيلهما بيانيًّا؟ نعم، يمكن إيجاد ذلك جبريًّا.
  - » هل يمكن لحل النظام في هذه المسألة أن يساعد المهندسين؟ نعم، يمكن أن يساعدهم على تخطيط الطرق والجسور والدواوير المرورية وغير ذلك.

3 التدريس

- اكتب معادلة خطية (linear equation)، ثم اطلب إلى الطلبة حلها.
- اكتب معادلة تربيعية (quadratic equation)، ثم اطلب إلى الطلبة حلها بطريقتين مختلفتين (القانون العام، والتحليل).
- مثِّل المعادلة الخطية والمعادلة التربيعية بيانيًّا، ثم اسأل الطلبة:
  - » ما عدد الحلول التي تُحقِّق المعادلة الخطية؟ كيف يمكن إيجادها من التمثيل البياني لمنحنى المعادلة؟
  - » ما عدد الحلول التي تُحقِّق المعادلة التربيعية؟ كيف يمكن إيجادها من التمثيل البياني لمنحنى المعادلة؟
  - » ما عدد نقاط التقاطع (intersection points) ؟
  - » ماذا تُمثِّل هذه النقاط للمنحنيين معًا؟
- اطلب إلى الطلبة اقتراح طريقة جبرية لإيجاد نقاط التقاطع.
- امنح الطلبة (3–2) دقائق لمحاولة حل السؤال جبريًّا.

مثال 1

- ابدأ بشرح المثال الذي يتناول حل نظام معادلات له حلان مختلفان، ثم اكتب على اللوح خطوات الحل بصورة واضحة.
- بيِّن للطلبة أنه يمكن جعل x موضوعًا للقانون بدلًا من y.
- حل المعادلة التربيعة على اللوح مُستعمِلًا القانون العام، وبيِّن للطلبة أنه يمكن حلها باستعمال طريقة التحليل إلى العوامل.
- نبِّه الطلبة إلى ضرورة التعويض في المعادلتين للتحقُّق من صحة الحل، ثم اطلب إليهم ذكر مثال على زوج مرتب يُحقِّق معادلة دون الأخرى، مثل: **(4, 3)** الذي يُحقِّق **المعادلة الخطية** فقط، أو **(1, 2)** الذي يُحقِّق **المعادلة التربيعية**.
- أخبِر الطلبة أنه يوجد حلان للنظام، وأن ذلك يتوافق مع التمثيل البياني للنظام، ثم اكتب على اللوح الحلين في أزواج مرتبة واضحة.

إرشادات:

- في المثال 1، وجِّه الطلبة إلى استعمال الأقواس في خطوة التعويض (substitute)، وشجِّعهم على كتابة كل خطوة من خطوات الحل بوضوح.
- أرشِد الطلبة إلى إيجاد المميز (discriminant) للمعادلة التربيعية؛ لتحديد عدد حلولها، ثم تحديد عدد حلول النظام.

ملاحظات المعلم

القانونُ العامُّ: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بالتعويضِ: $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$

بالتبسيطِ: $x = -1 , x = 2$

الحالةُ الأولى: عندما $x = -1$:

$y = x - 1$

بتعويضِ $x = -1$ في المعادلةِ الخطِّيةِ: $y = -1 - 1 = -2$

الحَلُّ الأولُ: $(x, y) = (-1, -2)$.

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ الأولِّ، أُعوِّضُ الزوجَ المُرتَّبَ $(-1, -2)$ في كلٍّ منَ المعادلةِ الخطِّيةِ والتربيعيةِ:

بالتعويضِ في المعادلةِ الخطِّيةِ: $x - y = -1 - (-2) = 1$ ✓

بالتعويضِ في المعادلةِ التربيعيةِ: $x^2 + y^2 = (-1)^2 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5$ ✓

الحالةُ الثانيةُ: عندما $x = 2$:

بتعويضِ $x = 2$ في المعادلةِ الخطِّيةِ: $y = 2 - 1 = 1$

الحَلُّ الثاني: $(x, y) = (2, 1)$.

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ الثاني، أُعوِّضُ الزوجَ المُرتَّبَ $(2,1)$ في كلٍّ منَ المعادلةِ الخطِّيةِ والتربيعيةِ:

بالتعويضِ في المعادلةِ الخطِّيةِ: $x - y = 2 - 1 = 1$ ✓

بالتعويضِ في المعادلةِ التربيعيةِ: $x^2 + y^2 = (2)^2 + (1)^2 = 4 + 1 = 5$ ✓

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ: $(2, 8), (-9, 30)$

$2x + y = 12$

$y = x^2 + 5x - 6$

يوجدُ حَلّانِ لنظامِ المعادلاتِ في المثالِ السابقِ. ولكنْ، هلْ يوجدُ نظامُ معادلاتٍ لهُ حَلٌّ واحدٌ؟ لمعرفةِ الإجابةِ، أَدرسُ المثالَ الآتيَ.

أَتذكَّرُ

توجدُ طرائقُ عِدَّةٌ لِحَلِّ معادلةٍ تربيعيةٍ، منْها: التحليلُ إلى العواملِ، والقانونُ العامُّ.

إرشادٌ

يجبُ تعويضُ الحَلِّ في كلتا معادلتَيِ النظامِ؛ لكيلا يكونَ الحَلُّ غيرَ صحيحٍ، بحيثُ يُحقِّقُ إحدى المعادلتيْنِ منْ دونِ الأُخرى.

التقويم التكويني:

- وزِّع الطلبة إلى مجموعات.
- اطلب إلى أفراد المجموعات حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**)؛ على أن يحل أفراد بعض المجموعات السؤال باستعمال القانون العام، ويحل أفراد بعضها الآخر السؤال نفسه باستعمال طريقة التحليل.
- تجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم المجموعة التي أخطأت في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجها.

أخطاء مفاهيمية :

- قد يخطئ بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط في التمييز بين المعادلة الخطية والمعادلة التربيعية؛ لذا، وجِّههم باستمرار.
- قد يخطئ بعض الطلبة في إشارات الحدود عند إعادة ترتيب المعادلة الخطية؛ لذا نبِّههم إلى هذا الخطأ باستمرار، واجعلهم يعتادون التحقُّق.
- قد يواجه بعض الطلبة صعوبات في حساب قيمة المميز (discriminant)؛ لذا ذكِّرهم بصيغته الرياضية، مُؤكِّدًا أهمية كتابة المعادلة التربيعية بالصورة الآتية:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ليسهل عليهم تحديد قيمة كل معامل بصورة صحيحة.

ثم ذكِّرهم بالحالات الثلاث:

المميز > 0: يوجد حلان حقيقيان.

المميز $= 0$: يوجد حلان متماثلان (حل حقيقي).

المميز < 0: لا توجد حلول حقيقية.

مثال 2

- ابدأ بشرح المثال الذي يتناول حل نظام له حل واحد، ثم اكتب على اللوح خطوات الحل بصورة واضحة.
- حــل المعادلة التربيعه مُســتعمِلًا طريقة التحليل الى العوامل، ثم اسأل الطلبة:

» هــل يمكن حــل المعادلة بطريقة أخــرى؟ نعم، يمكن حلها باستعمال طريقة القانون العام.

- أخبِر الطلبة أنه يوجد للنظام حل واحد فقط، وأن ذلك يتوافق مع التمثيل البياني للنظام.
- اكتب على اللوح الحل في زوج مرتب واضح.
- نبِّه الطلبة إلى ضرورة التعويض في المعادلتين للتحقُّق من صحة الحل، ثم اطلب إليهم ذكر مثال على زوج مرتب يُحقِّق معادلة دون الأخرى.

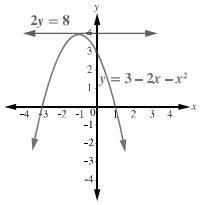
التقويم التكويني:

- وزِّع الطلبــة إلى مجموعات، ثم أعــطِ كلَّ مجموعة رقمًا.
- وجِّه أفــراد المجموعات ذوات الأرقــام الفردية إلى حــل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) باســتعمال طريقة التحليــل، ووجِّه أفــراد المجموعات ذوات الأرقام الزوجية إلى حل التدريب نفســه باســتعمال القانون العام.
- اختر بعض الإجابات التي تحــوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم المجموعة التي أخطأت في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجها.

مثال 2

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$2y = 8$$
$$y = 3 - 2x - x^2$$



عندَ تمثيلِ معادلتَي النظامِ على المســتوى الإحداثيِّ نفسِهِ، يُلاحَظُ وجودُ نقطةِ تقاطعٍ واحدةٍ كمــا في التمثيلِ البيانيِّ المجاورِ؛ ما يعني أنَّ للنظامِ حَلًّا واحــدًا فقطْ. أتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:

المعادلةُ الخطِّيَّةُ	$2y = 8$
بالقسمةِ على 2	$y = 4$
بتعويضِ قيمةِ y في المعادلةِ التربيعيةِ	$4 = 3 - 2x - x^2$
بالتبسيطِ	$x^2 + 2x + 1 = 0$

أَحُلُّ المعادلةَ باستعمالِ طريقةِ التحليلِ إلى العواملِ. هلْ توجدُ طريقةٌ أُخرى؟

بالتحليلِ	$(x + 1)(x + 1) = 0$
خاصيةُ الضربِ الصفريِّ	$x + 1 = 0$
بحَلِّ المعادلةِ	$x = -1$

أُعوِّضُ قيمةَ x لإيجادِ قيمةِ y :

المعادلةُ التربيعيةُ	$y = 3 - 2x - x^2$
بتعويضِ قيمةِ x	$y = 3 - 2(-1) - (-1)^2$
	$y = 4$

إذنْ، حَلُّ النظامِ هوَ الزوجُ المُرتَّبُ $(-1, 4)$.

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$4 \stackrel{?}{=} 3 - 2(-1) - (-1)^2$$
$$4 = 4 \quad ✓$$

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ: $(0, -2)$

$$y = x^2 - 2$$
$$y + 2 = 0$$

إرشادات:

- في المثال 2، ذكِّر الطلبة بكيفية تحليل المعادلة التربيعية، وعلاقة إشارة كل من الحد الأوسط والحد الأخير فيها بالإشارات داخل أقواس التحليل.
- في تدريب (أتحقق من فهمي) للمثال 2، أرشِــد الطلبة إلى استعمال مميز المعادلة التربيعية للتأكُّد أن لها حلًّا وحيدًا، ونوِّه دائمًا بتأثير ذلك في عدد حلول النظام.

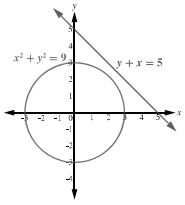
لاحظْتُ في المثالَيْنِ السابقَيْنِ وجودَ حَلٍّ أوْ حَلَّيْنِ لنظامِ المعادلاتِ. ولكنْ، هلْ توجدُ أنظمةُ معادلاتٍ ليسَ لها حَلٌّ؟ لمعرفةِ الإجابةِ، أدرسُ المثالَ الآتيَ.

مثال 3

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$y + x = 5$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

يَتبيَّنُ منَ التمثيلِ البيانيِّ المجاورِ أنَّ منحنيَيِ المعادلتَيْنِ لا يتقاطعانِ في أيِّ نقطةٍ؛ ما يعني عدمَ وجودِ حَلٍّ لنظامِ المعادلاتِ. أتَحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:



المعادلةُ الخطِّيةُ $y + x = 5$

بكتابةِ x بدلالةِ y $x = 5 - y$

بتعويضِ قيمةِ x في المعادلةِ التربيعيةِ $(5-y)^2 + y^2 = 9$

$25 - 10y + y^2 + y^2 = 9$

بالتبسيطِ $2y^2 - 10y + 16 = 0$

لِحَلِّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ، أُحدِّدُ قيمَ المعاملاتِ: $a = 2, b = -10, c = 16$

القانونُ العامُّ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بالتعويضِ $x = \dfrac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(2)(16)}}{2(2)}$

بالتبسيطِ $x = \dfrac{10 \pm \sqrt{-28}}{2}$

أتذكَّرُ
لا يوجدُ عددٌ حقيقيٌّ مربَّعُهُ عددٌ سالبٌ.

ألاحِظُ أنَّهُ عندَ تعويضِ قيمِ a، وَ b، وَ c في القانونِ العامِّ، ينتجُ جذرٌ تربيعيٌّ لعددٍ سالبٍ. إذنْ، لا يوجدُ حَلٌّ لهذا النظامِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$x - y = 0$$
$$y = x^2 + 3x + 2$$

لا يوجد حل للنظام.

أخطاء مفاهيمية:

في المثال 3، قد يحسب بعض الطلبة الجذر التربيعي لعدد سالب، مثل $\sqrt{-4} = -2$؛ لذا ذكِّرهم بمفهوم الجذر التربيعي للعدد، واطلب إليهم ذكر مثال على عدد يُضرَب في نفسه، ويكون ناتجه سالبًا؛ لإقناعهم بأن ذلك غير ممكن.

مثال 3

- وزِّع الطلبة إلى مجموعات، ثم أعطِ كلَّ مجموعة رقمًا.
- وجِّه أفراد المجموعات ذوات الأرقام الفردية إلى حل المثال بجعل x موضوعًا للقانون، ووجِّه أفراد المجموعات ذوات الأرقام الزوجية إلى حل المثال نفسه بجعل y موضوعًا للقانون.
- تجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- ناقِش الطلبة في إجاباتهم، بطرح الأسئلة الآتية:
  - » ما عدد حلول المعادلة التربيعية الناتجة؟ برِّر إجابتك. لا يوجد حل للمعادلة؛ لأن مميزها صفر.
  - » هل يوجد حل للنظام؟ برِّر إجابتك. لا، لا يوجد حل للنظام؛ لأنه لا يوجد حل للمعادلة التربيعية الناتجة من استعمال طريقة التعويض.
  - » هل يُؤثِّر المتغير الذي تجعله موضوعًا للقانون في حل النظام؟ برِّر إجابتك. لا، لا يؤثر؛ لأن جعل x أو y موضوعًا للقانون يُنتِج معادلة مميزها سالب.
- اطلب إلى الطلبة اقتراح حلول وتعويضها في المعادلتين للتحقُّق من عدم وجود حل للنظام.
- أكِّد عدم وجود حل للنظام باستعمال التمثيل البياني الموجود.

تنويع التعليم:

- وجِّه الطلبة ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط إلى حل النظام الآتي:

$$xy = 2$$
$$y = x + 1$$

إرشاد: بعد حل مثال 3، الفت انتباه الطلبة إلى التحقُّق من صحة الحل باستعمال برمجية جيوجبرا (في البيت، أو في مختبر الحاسوب، أو باستعمال الهواتف الذكية).

مثال 4: من الحياة

- لخِّص حالات حلول نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية، ثم ناقِش الطلبة فيها، واسألهم:
  - » هل يوجد نظام من معادلتين خطية وتربيعية له ثلاثة حلول؟
  - » لماذا؟
  - » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟

  لا، لا يوجد نظام من معادلتين خطية وتربيعية له ثلاثة حلول، ويمكن تقديم التبرير عن طريق الرسم.
- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في المثال الرابع، ثم اسألهم:
  - » من لديه معلومات عن صناعة السجاد في الأردن، وفي العالَم؟
- ابدأ بشرح المثال الحياتي، ثم اكتب على اللوح خطوات الحل بصورة واضحة، مُركِّزًا على كيفية تحديد المتغيرات، وتكوين المعادلات، وتدريب الطلبة على تحديد معطيات المسألة.
- اكتب على اللوح نظام المعادلات الذي يُعبِّر عن المسألة، ووجِّه الطلبة إلى حله.

أخطاء مفاهيمية:

في المثال 4، يخطئ بعض الطلبة بعدم استثناء القيم السالبة من الحل؛ لذا ذكِّرهم أن قيم x، وy هنا تُمثِّل طول السجادة وعرضها.

نتيجة

لأيِّ نظامٍ يتكوَّنُ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ، تكونُ واحدةٌ منَ العباراتِ الآتيةِ صحيحةً:

1. وجودُ حَلَّيْنِ مختلفيْنِ.
2. وجودُ حَلٍّ واحدٍ فقطْ.
3. عدمُ وجودِ حَلٍّ.

توجدُ تطبيقاتٌ حياتيةٌ كثيرةٌ لِحَلِّ الأنظمةِ التي تتكوَّنُ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ.

مثال 4: من الحياة

سَجّادةٌ مصنوعةٌ يدويًّا، مجموعُ بُعْدَيْها 7 m، وطولُ قُطْرِها 5 m. أَجِدُ كُلًّا منْ طولِها، وعرضِها.

قدْ تستغرقُ صناعةُ السَّجّادةِ اليدويةِ الصغيرةِ 4 أشهرٍ منَ العملِ المُتواصِلِ.

لإيجادِ بُعْدَيِ السَّجّادةِ، أَكتبُ نظامَ معادلاتٍ يُمثِّلُ المسألةَ، ثمَّ أَحُلُّهُ.

أَفترضُ أنَّ طولَ السَّجّادةِ هوَ x، وأنَّ عرضَها هوَ y، وبما أنَّ مجموعَ بُعْدَيِ السَّجّادةِ هوَ 7 m، فإنَّ: $x + y = 7$، وبما أنَّ قُطْرَ السَّجّادةِ هوَ 5 m، فإنَّ (باستعمالِ نظريةِ فيثاغورس): $x^2 + y^2 = 25$، إذنْ، أصبحَ لدينا نظامٌ يتكوَّنُ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ.

$$y + x = 7$$
$$x^2 + y^2 = 25$$

والآنَ، سأَحُلُّ النظامَ باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:

المعادلةُ الخطِّيةُ	$x + y = 7$
بكتابةِ y بدلالةِ x	$y = 7 - x$
بتعويضِ قيمةِ y في المعادلةِ التربيعيةِ	$x^2 + (7 - x)^2 = 25$
بالتبسيطِ	$2x^2 - 14x + 24 = 0$
بالقسمةِ على 2	$x^2 - 7x + 12 = 0$

أَتذكَّرُ

أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ التحليلِ باستعمالِ خاصيةِ التوزيعِ.

أَحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ بالتحليلِ إلى العواملِ:

بالتحليلِ	$(x - 4)(x - 3) = 0$
خاصيةُ الضربِ الصفريِّ	$x - 3 = 0$ او $x - 4 = 0$
بحَلِّ كلِّ معادلةٍ	$x = 3$ او $x = 4$

أُعوِّضُ قيمَ x في المعادلةِ الخطِّيةِ لإيجادِ قيمِ y:

بتعويضِ قيمةِ $x = 3$ في المعادلةِ الخطِّيةِ $y = 7 - 3$

قيمةُ y الأولى $y = 4$

بتعويضِ قيمةِ $x = 4$ في المعادلةِ الخطِّيةِ $y = 7 - 4$

قيمةُ y الثانيةُ $y = 3$

إذن، حَلُّ النظامِ هوَ: $(4, 3)$ وَ $(3, 4)$.

بما أنَّ طولَ السَّجّادةِ أكبرُ منْ عرضِها، فإنَّ الطولَ هوَ 4 m، والعرضَ هوَ 3 m

أتحقق من فهمي

مزرعةٌ مستطيلةُ الشكلِ، طولُ قُطْرِها 50 m، ومحيطُها 140 m. أَجِدُ بُعْدَيِ المزرعةِ. انظر الهامش

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1) $y = x^2 + 6x - 3$, $y = 2x - 3$ $(0, -3), (-4, -11)$

2) $y = x^2 + 4x - 2$, $y + 6 = 0$ $(-2, -6)$

3) $y = x^2 + 4$, $x - y = -1$ لا يوجد حل للنظام.

4) $y = x^2 + 5x - 1$, $2x + 3y = 1$ $(-5.89, 4.26), (0.226, 0.18)$

5) $y = x^2 + 4x + 7$, $y - 3 = 0$ $(-2, 3)$

6) $y = x^2 - 2x + 4$, $y = x$ لا يوجد حل للنظام.

7) $x^2 + y^2 = 8$, $2x + 3y = 7$ $(2.788, 0.47), (-0.63, 2.756)$

8) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = 0$ $(-1, 0)$

9) $x^2 + y^2 = 4$, $x + y = 5$ لا يوجد حل للنظام.

10) $x^2 + y^2 = 10$, $x - y = 2$ $(-1, -3), (3, 1)$

11) $x^2 + (y - 1)^2 = 17$, $x = 1$ $(1, -3), (1, 5)$

12) $(x - 1)^2 = 4$, $y = 5 - x$ $(3, 2), (-1, 6)$

13) بركةٌ: بركةُ ماءٍ قاعدتُها مستطيلةُ الشكلِ، ومحيطُها 16 m، والفرقُ بينَ مربَّعَيْ بُعْدَيْها $16\ m^2$. أَجِدُ بُعْدَيْها. انظر الهامش

14) أعدادٌ: أَجِدُ العددَيْنِ الموجبَيْنِ اللذَيْنِ مجموعُهُما 12، والفرقُ بينَ مربَّعَيْهِما 24 انظر الهامش

15) هندسةٌ: دائرتانِ مجموعُ محيطَيْهِما 12π cm، ومجموعُ مساحتَيْهِما $20\pi\ cm^2$. أَجِدُ قُطْرَ كلٍّ منْهُما. انظر الهامش

إجابات:

(**أتحقق من فهمي 4**): افترض أن طول المزرعة هو x، وأن عرضها هو y:

$$x^2 + y^2 = 2500$$
$$2x + 2y = 140$$
$$\Rightarrow (x, y) = (40, 30)$$

13) افترض أن الطول هو x ، وأن العرض هو y:

$$2x + 2y = 16$$
$$x^2 - y^2 = 16$$

الحل: $(5, 3)$

14) افترض أن العدد الأول هو x، وأن العدد الثاني هو y:

$$x + y = 12$$
$$x^2 - y^2 = 24$$

الحل: $(7, 5)$

15) قطر الدائره الأولى r_1 ، قطر الدائره الثانية r_2

$$2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 12\pi$$
$$\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = 24\pi$$
$$r_1 = 2, r_2 = 4$$

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة بند (أتدرب وأحل المسائل)، ثم اطلب إليهم حل الأسئلة ذوات الأرقام الزوجية من 1 إلى 18، وتابِعهم في هذه الأثناء.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، ثم اطلب إليهم حل مسائل مهارات التفكير العليا.
- تجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- ناقِش أفراد المجموعات في حلولها.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في حل الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل)، فضع كلًّا منهم مع طالب آخر من ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط؛ ليتشاركا في حل الأسئلة.

إرشاد: ذكِّر الطلبة بقانوني محيط الدائرة، ومساحة الدائرة قبل البدء بحل السؤال 15.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة حلّ مسائل الدرس جميعها من كتاب التمارين واجبًا منزليًّا، لكن حدِّدِ المسائلَ التي يمكنهم حلّها في نهاية كل حصة بحسب ما يتمّ تقديمه من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضا إضافة المسائل التي لم يحلّها الطلبة داخل الغرفة الصفية إلى الواجب المنزلي.

إرشاد: ذكِّر الطلبة بقانون فيثاغورس قبل البدء بحل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**).

مهارات التفكير العليا

- أشـرِك الطلبـة كافةً في حـل هذه المسـائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّـر أنه ليس شـرطًا أن يتمكَّن الطلبـة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها، ويمكن التغلـب على ذلك بالطلب إلى الطلبة حل هذه الأسـئلة ضمن مجموعات غير متجانسة، وتشجيعهم على تبرير الحلول التي يتوصَّلون إليها.

5 الإثراء

- وجِّه بعض الطلبة – بعد مناقشـة المثال الرابع– إلى البحث في شـبكة الانترنت أو مكتبة المدرسـة عن صناعة البسط في التراث الأردني، ثم كتابة تقرير عن ذلك، ثم قراءته في الإذاعة المدرسية.
- وجِّه بعض الطلبة إلى البحث في شـبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيق حياتي على نظام مكون من معادلة خطية وأخرى تربيعية، وحله.
- نبِّه الطلبة إلى ضرورة توثيق مصدر المعلومة دائمًا.

التوسُّع:

- وجِّه الطلبة ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط إلى حل النظام الآتي:

$$x\,y = 2 \qquad y = x + 1$$

تعليمات المشروع:

- وجِّه الطلبة إلى استكمال الخطوة الثانية من المشروع، ومحاولة الانتهاء من جمع الصور، وإيجاد معادلات المنحنيات التي اختاروها من الصور التي اعتمدوها.

6 الختام

- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة.
- أحضِـر صندوقين، يحوي الأول عِـدَّة بطاقات كُتِب على كل منهـا معادلة خطيـة، ويحـوي الثاني عِدَّة بطاقات كُتِب على كل منها معادلة تربيعية.
- اطلب إلى أفراد كل مجموعة تحديد مُمثِّل لها؛ ليختار بطاقـة من كل صنـدوق، ثم يحل أفـراد المجموعة النظام المكون من المعادلتين بأسرع وقت ممكن.
- الفت انتباه أفراد كل مجموعة إلى أنه يمكن لهم إعادة اختيار بطاقة واحدة فقط من أحد الصندوقين في حال حصلوا علـى نظام له عدد لا نهائي مـن الحلول، أو ليس له حل.

16 أعمارٌ: قالَتْ شـيماءُ: «عُمْري أكبرُ بأربعِ سـنواتٍ منْ عُمْرِ أخي ريّانَ، ومجموعُ مُرَبَّعَـيْ عُمْرَيْنا هوَ 346». ما عُمْرُ شيماءَ؟ انظر ملحق الإجابات.

17 لوحـةٌ: لوحةٌ مسـتطيلةُ الشـكلِ، طولُها يسـاوي مِثْلَيْ عرضِها، وطولُ قُطْرِها $\sqrt{1.25}$ m ، أُحيطَ بها إطارٌ، تكلفةُ المترِ المربعِ الواحدِ منْهُ بالدينارِ 2.25 . أَجِدُ تكلفةَ الإطارِ. انظر ملحق الإجابات.

18 زراعةٌ: قسَّمَ فيصلٌ 41m^2 منْ مزرعتِهِ إلى منطقتيْنِ مربَّعَتَيِ الشكلِ، ثمَّ زرعَهُما بمحصولَيِ الطماطمِ والبطاطا. إذا زادَ بُعْدُ المنطقةِ المزروعةِ بالطماطمِ مترًا واحدًا على بُعْدِ المنطقةِ المزروعةِ بالبطاطا، فما مساحةُ المنطقةِ المزروعةِ بكلِّ محصولٍ؟ انظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا 19-24 انظر ملحق الإجابات.

19 تبريرٌ: صُمِّمَتْ نافورةٌ بصورةٍ يخرجُ منْها الماءُ بحسبِ العلاقةِ: $y + x^2 = 10$، إذا وُضِعَتْ وحدةُ إنارةٍ على المستقيمِ الذي معادلتُهُ: $y = 12 + x$، فهلْ يصلُ ماءُ النافورةِ إلى وحدةِ الإنارةِ؟

20 تحدٍّ: إذا علمْتُ أنَّ المعادلةَ الخطِّيةَ: $y = 3x + p$ تقطعُ المنحنى: $y = 2x^2 + 3x - 5$ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ، فما قيمةُ p؟

21 تحدٍّ: أجدُ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ: $5x - 6 < 3x^2 - 7x + 2$، بحلِّ نظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$y = 3x^2 - 7x + 2$$

$$y = 5x - 6$$

مسألةٌ مفتوحةٌ: أَكتبُ ثلاثَ معادلاتٍ خطِّيةٍ تُكوِّنُ كلٌّ منْها معَ المعادلةِ التربيعيةِ: $y = x^2$ نظامًا يُحقِّقُ إحدى الحالاتِ الآتيةِ:

22 يوجدُ حَلّانِ للنظامِ.

23 يوجدُ حَلٌّ واحدٌ للنظامِ.

24 لا يوجدُ حَلٌّ للنظامِ.

إرشاد:

يمكن حل السؤال رقم 21 بيانيًّا بالاستعانة ببرمجية جيوجبرا، وتوضيح منطقة الحل بيانيًّا (المنطقة التي يقع فيها منحنى المعادلة التربيعية فوق منحنى المعادلة الخطية – الخط المستقيم).

تنبيه!

في السؤال 17 نبه الطلبة إلى وجود خطأ في السؤال واطلب إليهم اكتشافه. الخطأ هو كتابة كلمة (المربع) بدل (الطولي). اطلب الى الطلبة تعديلها على كتبهم.

الدرسُ 2

حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ
Solving a System of Two Quadratic Equations

فكرةُ الدرسِ حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ بمُتغيِّريْنِ.

مسألةُ اليوم استعملَ خبيرُ تسـويقِ المعادلتيْنِ التربيعيتيْنِ الآتيتيْنِ لتمثيلِ مقدارِ كلٍّ منَ العرضِ والطلبِ لسـلعةٍ تجاريةٍ؛ بُغْيَةَ تحديدِ نقاطِ التوازنِ التي يتسـاوى عندَها العرضُ معَ الطلبِ في السـوقِ، حيثُ يُمثِّلُ x سـعرَ الوحدةِ، ويُمثِّلُ y عـددَ الوحداتِ المبيعةِ. هـلْ يُمكِنُني مساعدةُ الخبيرِ على تحديدِ نقاطِ التوازنِ؟

$$y = x^2 + 6x$$
$$y = -x^2 + 24x$$

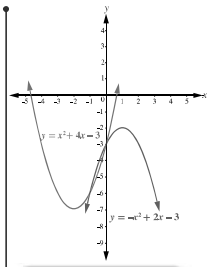
لِحَـلِّ نظامٍ يتكوَّنُ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ، تُسـاوى أولًا المعادلتـانِ بعضُهُما ببعضٍ لتكوينِ معادلةٍ تربيعيةٍ واحدةٍ.

مثال 1

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$y = x^2 + 4x - 3$$
$$y = -x^2 + 2x - 3$$

عندَ تمثيلِ معادلتَيِ النظامِ على المسـتوى الإحداثيِّ نفسِهِ، يُلاحَظُ أنَّ منحنييْهِما يتقاطعانِ في نقطتيْنِ كما في الشكلِ المجاورِ؛ ما يعني أنَّ للنظامِ حَلَّيْنِ مختلفيْنِ. أتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.



بدايةً، يجبُ مساواةُ معادلتَيِ النظامِ المعطى، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ:

بمساواةِ المعادلتيْنِ $x^2 + 4x - 3 = -x^2 + 2x - 3$

بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ، والتبسيطِ $2x^2 + 2x = 0$

أَحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ الناتجةَ باستعمالِ التحليلِ:

بتحليلِ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ $2x(x + 1) = 0$

حَلّا المعادلةِ $x = 0$ وَ $x = -1$

لإيجادِ قيمةِ y، أُعوِّضُ قيمتَيْ x في أيٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ:

أتذكَّرُ
يُمكِنُـني حَـلُّ المعادلـةِ التربيعيةِ الناتجةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ أيضًا.

الدرس 2

فكرةُ الدرسِ

- حل نظام مكون من معادلتين تربيعيتين بمتغيرين.
- تعرف عدد الحلول الممكنة لنظام مكون من معادلتين تربيعيتين.
- حل مسائل رياضية وحياتية على أنظمة المعادلات.

التعلم القبلي:

- حل نظام مكون من معادلتين خطيتين.
- حل معادلة تربيعية بالقانون العام والتحليل.
- حل نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية.

1 التهيئة

- ذكِّر الطلبة بمفهوم كل من: نظام المعادلات (system of equations)، وحـل النظـام، ثـم ذكرهم بعدد الحلول التي يمكـن إيجادها عند حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بيانيًّا، وارتباطها بوضع المستقيمين في المستوى الإحداثي (حل واحد في حالة التقاطع، وعدم وجود حلول في حالة التوازي، وعدد لا نهائي من الحلول في حالة تطابق المسـتقيمين). ثم ذكرهم بعدد الحلـول الممكنة في حالة النظـام المكون من معادلـة تربيعية وأخرى خطية (عـدم وجود حل، أو وجـود حل واحـد، أو وجود حلين)، وارسـم على اللوح تمثيلات تقريبية تُوضِّح الحالات الثلاث.
- اطلب إلى أحـد الطلبة كتابـة معادلـة تربيعية على السبورة، ثم اكتب المعادلة $x^2 + y^2 = 9$ ووضح لهم أنه تكون لدينا نظام من معادلتين، واسألهم:
  - ما اسـم نظـام المعـادلات الـذي أمامكم على السبورة؟
  - كيف يمكن حله باعتقادكم؟
- اسـتمع لإجابات أكبر عدد من الطلبة، واسـألهم دائما: من يؤيد الإجابة؟ لماذا؟ من لديه إجابة أخرى؟ اذكرها. وذلـك لتعزيز مهارات التواصل واحتـرام الرأي والرأي الآخر لديهم. ثم وضح لهم أنهم سيتعرفون على حل مثل هذا النظام في هذا الدرس، واكتب عنوانه على السبورة.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة (مسألة اليوم) الواردة في بداية الدرس (امنحهم دقيقة أو دقيقتين لذلك).
- اكتب على اللوح المعادلتين الواردتين في المسألة.
- اسأل الطلبة: ما نوع المعادلات في هذا النظام؟
- ثم اسألهم: كيف يمكن حل هذا النظام؟
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجع الطلبة على استعمالها.

3 التدريس

- اطرح السؤال الآتي على الطلبة:
  - » عندما يتكون نظام المعادلات المراد حلّه من معادلتين تربيعيتين two quadratic equations – مثل الحالة التي في مسألة اليوم – ما عدد الحلول التي يمكنك الحصول عليها؟ لماذا؟
- امنح الطلبة بعض الوقت لتقديم إجاباتهم وتبريرها. وإذا أجاب أحدهم إجابة معينة ولتكن (حلّين) اطلب إليه توضيح إجابته بتمثيل بياني تقريبي.
- وضح للطلبة أن إيجاد إحداثيي نقاط التقاطع –إن وجدت– بالطرق الجبرية هو ما سيتعلموه في هذا الدرس، وأن إحداثيات نقاط التقاطع intersection points هي (الحلول الممكنة للنظام).

مثال 1

- ناقش حل المثال الذي يوضح طريقة حل نظام من معادلتين تربيعيتين لهما حلان مختلفان على السبورة مراعيا تبرير كل خطوة.
- نبّه الطلبة بعد خطوة مساواة المعادلتين معًا إلى أهمية جعل الطرف الأيمن من المعادلة يساوي صفرًا وتجميع الحدود المتشابهة في الطرف الأيسر منها (أو العكس) ليتمكن من حل المعادلة التربيعية، أكّد أنه لا فرق بين جعل الطرف الأيمن أو الأيسر من المعادلة يساوي صفرًا.
- ذكّر الطلبة بإخراج العامل المشترك common factor كطريقة لتحليل المقادير الجبرية algebraic expressions .
- أكد أنه يوجد للنظام حلّين من خلال التمثيل البياني الموجود في كتاب الطالب وأشّر إلى الحلول على التمثيل البياني (يمكن رسم شكل تقريبي على السبورة).

ملاحظات المعلم

الحالةُ الأولى: إذا كانَتْ $x = 0$:

بتعويضِ $x = 0$ في إحدى المعادلتيْنِ $y = -(0)^2 + 2(0) - 3$

بالتبسيطِ $y = -3$

إذنْ، الحَلُّ الأولُ للمعادلةِ هوَ: $(x, y) = (0, -3)$.

الحالةُ الثانيةُ: إذا كانَتْ $x = -1$:

بتعويضِ $x = -1$ في إحدى المعادلتيْنِ $y = -(-1)^2 + 2(-1) - 3$

بالتبسيطِ $y = -6$

إذنْ، الحَلُّ الثاني للمعادلةِ هوَ: $(x, y) = (-1, -6)$.

إذنْ، حلُّ النظامِ هوَ: $(3, 0)$, $(-6, -1)$.

إرشادٌ

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ قيمتَيْ x وَ y في كلٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ: $(1, 0), (-3, 0)$

$y = -x^2 - 2x + 3$

$y = x^2 + 2x - 3$

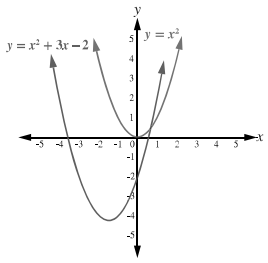
قدْ يتقاطعُ منحنيا معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ، وعندئذٍ يكونُ لنظامِ المعادلاتِ الذي تُكوِّنُهُ هاتانِ المعادلتانِ حَلٌّ واحِدٌ.

مثال 2: من الحياة

سباقاتٌ: في أحدِ سباقاتِ المراحلِ، سلكَ مُتسابِقٌ مسارًا تُمثِّلُهُ المعادلةُ التربيعيةُ: $y = x^2$ في حينِ سلكَ مُتسابِقٌ آخرُ مسارًا تُمثِّلُهُ المعادلةُ: $y = x^2 + 3x - 2$. أَجِدُ نقطةَ التقاطعِ بينَ مسارَيِ المُتسابِقيْنِ.

تُجرى سباقاتُ المراحلِ على مدارِ أيامٍ، وهيَ تقامُ على مساراتٍ متنوعةٍ منْ حيثُ التضاريسُ، مثلِ: الطرقِ المُنبسطةِ، والطرقِ الجبليةِ.

عندَ تمثيلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا كما في الشكلِ المجاورِ، يُلاحَظُ وجودُ نقطةِ تقاطعٍ واحدةٍ بينَ منحنييْهِما؛ ما يعني أنَّ لنظامِ المعادلاتِ حَلًّا واحدًا. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.



بدايةً، يجبُ مساواةُ معادلتَيِ النظامِ المعطى، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ:

إرشاد: قد يتساءل بعض الطلبة عن سبب وجود مسارين مختلفين في مسألة السباقات؛ لذا أخبِرهم أن ذلك لا يعني بالضرورة اختلاف المسافة التي يقطعها كل متسابق.

التقويم التكويني:

- اطلب إلى الطلبة حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات غير متجانسة).
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم مَنْ أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

أخطاء شائعة:

في تدريب (أتحقق من فهمي) قد يواجه بعض الطلبة صعوبات في جعل أحد طرفي المعادلة يساوي صفرًا، فيحذفون -مثلًا- x^2 و $-x^2$؛ لذا أكِّد باستمرار وجوب إضافة النظير الجمعي إلى الحدود في طرفي المعادلة.

مثال 2: من الحياة

- اسأل الطلبة:
  - » أيكم يركب درّاجة؟
  - » ماذا تعرفون عن سباقات المراحل؟
- استمع لإجابات أكبر عدد من الطلبة، وشجِّعهم على الحديث عن تجاربهم الشخصية؛ لتعزيز مهارات التواصل.
- ناقِش الطلبة في مسألة السباقات الواردة في المثال، مُؤكِّدًا أن تطبيقات أنظمة المعادلات التربيعية متعددة في حياتنا.
- ناقِش الطلبة في حل المثال الذي يعرض حل نظام من معادلتين تربيعيتين له حل واحد.
- نبِّه الطلبة - بعد خطوة مساواة المعادلتين معًا- إلى إمكانية التخلُّص من الحد x^2 من الطرفين (بإضافة النظير الجمعي)، ثم تجميع الحدود التي تحوي x في الطرف الأيسر، ثم اسألهم:
  - » كم عدد حلول النظام؟ لماذا؟ عدد حلول النظام هو حل واحد؛ لأنه ينتج من المعادلة الخطية حل واحد فقط.
- استعمل التمثيل البياني الموجود في كتاب الطالب للتحقُّق من صحة الحل، وتأكيد وجود حل واحد للنظام، ثم اكتب الحل في صورة زوج مرتب عند نقطة التقاطع (يمكنك رسم منحنيي المعادلتين بصورة تقريبية على اللوح).

بمساواةِ المعادلتيْنِ $x^2 + 3x - 2 = x^2$

بطرحِ x^2 منْ كلا الطرفيْنِ $x^2 + 3x - 2 - x^2 = 0$

بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ، والتبسيطِ $3x - 2 = 0$

$x = \frac{2}{3}$

بعدَ ذلكَ أَجِدُ قيمةَ y، وذلكَ بتعويضِ قيمةِ $x = \frac{2}{3}$ في أيٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ:

بتعويضِ قيمةِ $x = \frac{2}{3}$ $y = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{3}\right) - 2$

بالتبسيطِ $y = \frac{4}{9}$

إذنْ، حَـلُّ نظـامِ المعـادلاتِ هـوَ: $x = \frac{2}{3}, y = \frac{4}{9}$، ونقطـةُ تقاطـعِ المنحنيَيْـنِ هـيَ: $(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$.

رياضـةُ التزلُّجِ هـيَ إحدى أسـرعِ الرِّياضاتِ غيرِ الآليةِ؛ فقدْ تصلُ سرعةُ المُتزلِّجِ إلى 200 km/h

أتحقق من فهمي

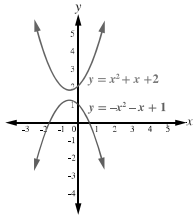
تُمثِّـلُ المعادلـةُ: $y = x^2 + 2x$ مسـارَ مُتزلِّـجٍ علـى الجليدِ، في حيـنِ تُمثِّـلُ المعادلةُ: $y = x^2 - x + 5$ مسارَ مُتزلِّجٍ آخرَ. أَبحثُ عنْ جميعِ النقاطِ التي قدْ يصطدمُ عندَها المُتزلِّجانِ إذا لمْ يكونا حذريْنِ. $(\frac{5}{3}, \frac{55}{9})$

عرضْنا في المثاليْنِ السابقيْنِ أنظمةَ معادلاتٍ تربيعيةٍ لها حَلّانِ أَوْ حَلٌّ واحدٌ. ولكنْ، هلْ يوجدُ دائمًا حَلٌّ للنظامِ المُكوَّنِ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ؟ أَدرسُ المثالَ الآتيَ.

مثال 3

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$y = x^2 + x + 2$$
$$y = -x^2 - x + 1$$



عندَ تمثيـلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا كما في الشـكلِ المجاورِ، يُلاحَظُ عدمُ وجـودِ نقاطِ تقاطعٍ بينَ منحنييْهما؛ ما يعني عدمَ وجودِ حَلٍّ لنظامِ المعادلاتِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.

بدايةً، يجبُ مساواةُ معادلتَيِ النظامِ المعطى، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ لإيجادِ قيمةِ x:

بمساواةِ المعادلتيْنِ $x^2 + x + 2 = -x^2 - x + 1$

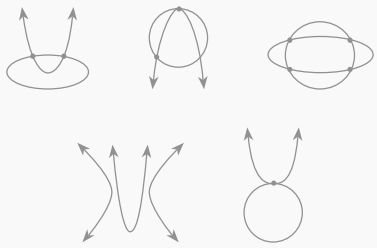
بالتبسيطِ $2x^2 + 2x + 1 = 0$

✓ إرشادات عامة:

- أكِّد دائمًا أهمية التحقُّق من صحة الحل.
- أكِّد علـى عدد حلول النظام الناتجة في كل مرة، واربط ذلك بالخطوة المناسبة من خطوات الحل الجبري.

مثال 3

- بيِّن للطلبة عدد الحلول التي نوقشـت في المثالين 1، 2 واسـألهم هل تتوقعون وجود حالات أخرى لعدد الحلول الممكنة لنظام مكون من معادلتين تربيعيتين؟
- اسـتمع لإجابات الطلبة ووضح لهم مع الرسم على السـبورة الحالات الخمس التـي تُمثِّل عدد الحلول الممكنة (possible solutions)، وهي تتراوح بين 0 (لا تقاطع)، و 4 (أربع نقاط تقاطع)، مثل الحالات في الشكل الآتي:



- اطلب إلى الطلبة رسم تمثيلات تقريبية غير تلك التي عُرِضت عليهـم للحالات المختلفة لعـدد الحلول الممكنة لنظام مكون من معادلتين تربيعيتين.
- ناقِش الطلبة في حل المثال الثالث الذي يعرض نظامًا من معادلتين تربيعيتين ليس له حل حقيقي.
- الفت انتباه الطلبة إلى أهميـة اختبار المميز للمعادلة التربيعية الناتجة، وذكِّرهم أنه إذا كان المميز أقل من صفر، فإنه لا توجد حلول حقيقية للمعادلة التربيعية؛ ما يعني عدم وجود حل لنظام المعادلات التربيعية.
- للتحقُّق من صحة الحل، استعمل التمثيل البياني الموجود في كتاب الطالب.
(يمكنك رسم شكل تقريبي على اللوح).

أَتذكَّرُ

يعتمدُ عددُ جذورِ المعادلةِ وأنواعُها على قيمةِ المُميِّزِ الذي يُرمَزُ إليهِ بالرمزِ (Δ)، حيثُ:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

بعدَ ذلكَ أَجِدُ قيمةَ المُميِّزِ $\Delta = b^2 - 4ac$ لتحديدِ إذا كانَ للمعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ حَلٌّ أمْ لا.

قيمُ المعاملاتِ هي: $a = 2, b = 2, c = 1$. وبالتعويضِ في المُميِّزِ ينتجُ:

$$\Delta = (2)^2 - 4(2)(1) = -4$$

قيمةُ المُميِّزِ سالبةٌ. إذنْ، لا يوجدُ حَلٌّ للمعادلةِ. ومنهُ لا يوجدُ حَلٌّ لهذا النظامِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ: لا يوجد حل للنظام.

$$y = x^2 + 4$$
$$y = -x^2 + 2$$

عرضْنا في الأمثلةِ السابقةِ أنظمةً لها حَلّانِ، أوْ حَلٌّ واحدٌ، أوْ ليسَ لها حَلٌّ. ولكنْ، هلْ يوجدُ نظامٌ مُكوَّنٌ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ، لهُ ثلاثةُ حلولٍ، أوْ أربعةٌ؟ أَدرسُ المثالَ الآتيَ.

مثال 4

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$x^2 + y^2 = 13$$
$$x^2 - y = 7$$

عندَ تمثيلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا كما في الشكلِ المجاورِ، يُلاحَظُ وجودُ 4 نقاطِ تقاطعٍ بينَ منحنييْهما؛ ما يعني وجودَ أربعةِ حلولٍ لنظامِ المعادلتيْنِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.

يظهرُ المُتغيِّرُ x في كلتا المعادلتيْنِ بالقوَّةِ نفسِها؛ لذا يُمكِنُني استعمالُ الحذفِ للتخلُّصِ منْ هذا المُتغيِّرِ، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ التي تحوي مُتغيِّرًا واحدًا هوَ y:

$$x^2 + y^2 = 13$$
$$(-) \quad x^2 - y = 7$$

بالطرحِ
$$y^2 + y = 6$$

بطرحِ 6 منْ كلا الطرفيْنِ
$$y^2 + y - 6 = 0$$

يُمكِنُني حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ، أوِ التحليلِ:

بالتحليلِ
$$(y + 3)(y - 2) = 0$$

إذنْ: $y = -3 , y = 2$

أُعوِّضُ قيمتَيْ y في إحدى معادلتَيِ النظامِ لإيجادِ قيمِ x:

بتعويضِ قيمةِ $y = -3$
$$x^2 = -3 + 7$$

إرشاد:

في المثال 4، ذكِّر الطلبة بكيفية تحليل المعادلة التربيعية، وعلاقة إشارة كل من الحد الأوسط والحد الأخير فيها بالإشارات داخل قوسي التحليل.

أخطاء شائعة:

في المثال 4، قد يخطئ بعض الطلبة عند كتابة الحلول في صورة أزواج مرتبة بقلب مواضع الإحداثيين؛ نظرًا إلى اختلاف هذا المثال عن الأمثلة السابقة؛ إذ يجب إيجاد قيمة y أولاً؛ لذا أكِّد لهم طريقة الكتابة الصحيحة في صورة (x, y)، ثم وجِّههم إلى إمكانية استعمال أقلام ملونة عند كتابة الأزواج المرتبة كما هو مُبيَّن في كتاب الطالب.

إرشاد:

- في المثال 3، أكِّد ضرورة إيجاد قيمة المميز كلما نتج من مساواة معادلتي النظام معادلة تربيعية في الصورة الآتية: $ax^2 + bx + c = 0$ ؛ للتأكُّد أن المعادلة التربيعية ليس لها حلول حقيقية.
- للتحقُّق من صحة الحل، اطلب إلى الطلبة تمثيل منحنيي معادلتي النظام بيانيًّا باستخدام برمجية جيوجبرا.

مثال 4

- يحتوي نظام المعادلات في المثال الرابع على معادلتين تربيعيتين: الأولى تُمثِّل معادلة دائرة (circle)، والثانية تُمثِّل معادلة قطع مكافئ (Parabola)، وله أربعة حلول مختلفة.
- أخبِر الطلبة أنه يمكن حل النظام باستعمال طريقة الحذف(elimination) ، ثم اسألهم:
  - » أيهما أفضل: حذف المتغير x أم المتغير y؟ لماذا؟
  - » لماذا لا يمكن التخلُّص من المتغير y ؟
- ناقِش الطلبة في حل المثال على اللوح، وشجِّعهم على تبرير كل خطوة تقوم بها.
- حُلَّ المعادلة التربيعية بالتحليل إلى العوامل، ثم اسأل الطلبة:
  - » كيف يمكن التحقُّق من قابلية المعادلة للتحليل؟ ذكِّر الطلبة بالمميز.
- حُلَّ المعادلة التربيعية باستعمال القانون العام في الهامش، ثم اسأل الطلبة:
  - » أي الطريقتين تفضلون: التحليل إلى العوامل أم القانون العام؟ لماذا؟
- أخبِر الطلبة أنه يمكن التعويض عن y في أي من معادلتي النظام للحصول على قيم x المقابلة.
- اكتب جميع الحلول في صورة أزواج مرتبة واضحة.
- للتحقُّق من صحة الحل، استعمل التمثيل البياني الموجود في كتاب الطالب، وعيِّن الحلول عليه.
- (يمكنك رسم شكل تقريبي على اللوح).

بحَلِّ المعادلةِ $x = \pm 2$

إذنْ، $x = 2, x = -2$

بتعويضِ قيمةِ $y = 2$ $x^2 = 2 + 7 = 9$

بحَلِّ المعادلةِ $x = \pm 3$

إذنْ، توجدُ أربعةُ حلولٍ للنظامِ، هيَ: $(3, -2)$ ، وَ$(-3, 2)$، وَ $(3, 2)$ ، وَ$(-3, 2)$.

أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ هذهِ الحلولِ بتعويضِها في كلٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ: انظر الملحق

$x^2 + y^2 = 16$

$3y - x^2 = -12$

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1. $y = 2x^2 + x - 5$, $y = -x^2 - 2x - 5$ — (-1, -4), (0, -5)
2. $y = x^2 - 4x + 1$, $y = -2x^2 - 4$ — لا يوجد حل للنظام.
3. $y = x^2 + 1$, $y = 2x^2 - 3$ — (-2, 5), (2, 5)
4. $y = x^2 + x + 1$, $y = -x^2 + x - 2$ — لا يوجد حل للنظام.
5. $y = -x^2 + 5x$, $y = x^2 - 5x$ — (0, 0), (5, 0)
6. $y = x^2$, $y = x^2 + x + 6$ — (-6, 36)
7. $y = -x^2 + 6x + 8$, $y = -x^2 - 6x + 8$ — (0, 8)
8. $x^2 + y^2 = 16$, $y = x^2 - 5$ — انظر الملحق
9. $5x^2 - 2y^2 = 18$, $3x^2 + 5y^2 = 17$ — (2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1)
10. أَجِدُ نقاطَ التقاطعِ بينَ الدائرتيْنِ: انظر الملحق

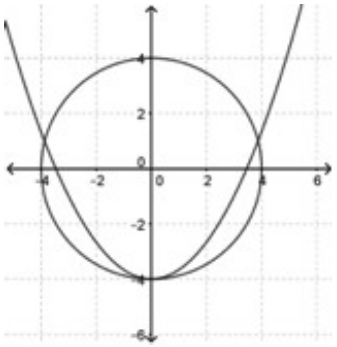
$x^2 + (y - 2)^2 = 4$

$x^2 + y^2 = 9$

11. عددانِ، مجموعُ مربَّعَيْهِما 89، والفرقُ بينَ مربَّعَيْهِما 39، ما هذانِ العددانِ؟ انظر الهامش

إرشادات:

- في المثال 4، نبِّه الطلبة إلى ضرورة إعادة ترتيب الحدود المتشابهة أسفل بعضها عند استعمال طريقة الحذف؛ ليسهل عليهم تحديد المتغير الذي سيحذفونه.
- للتحقُّق من صحة الحل، وجِّه الطلبة إلى تعويض كل من الحلول الثلاثة في معادلتي النظام، ثم اعرض أمامهم التمثيل البياني المرفق.
- وجِّه الطلبة إلى استعمال برمجية جيوجبرا -إن أمكن ذلك- للتحقُّق من صحة الحل، حيث سيظهر الشكل الآتي:



- ذكِّر الطلبة بإمكانية تنزيل برمجية جيوجبرا من متجر الهاتف، وتحميله في هواتفهم الذكية.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل)، ثم ناقِشهم في حل الأسئلة (4, 6, 8, 10, 12, 14) على اللوح، ثم اطلب إليهم حل بعض الأسئلة ضمن مجموعات ثنائية.
- تجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة حلّ مسائل الدرس جميعها من كتاب التمارين واجبًا منزليًّا، لكن حدِّدِ المسائلَ التي يمكنهم حلّها في نهاية كل حصة بحسب ما يتمّ تقديمه من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضا إضافة المسائل التي لم يحلّها الطلبة داخل الغرفة الصفية إلى الواجب المنزلي.

إرشاد: وجِّه الطلبة إلى استعمال القانون العام والآلة الحاسبة في حل السؤالين: 8، و10.

إجابات:

11) افترض أن العدد الأول هو x ، وأن العدد الثاني هو y:

$x^2 + y^2 = 89$

$x^2 - y^2 = 39$

بحل نظام المعادلات التربيعية، ينتج:

$(8,5), (-8, 5), (8, -5), (-8, -5)$

12 فيزياءُ: قُذِفَتْ كرتانِ رأسيًّا في الوقتِ نفسِهِ منْ موقعيْنِ مختلفيْنِ. إذا كانَتِ المعادلةُ: $y=-2t^2+12t+10$ تُمثِّلُ ارتفاعَ الكرةِ الأولى بالأمتارِ بعدَ مرورِ t ثانيةٍ، وكانَتِ المعادلةُ: $y=-2t^2+4t+42$ تُمثِّلُ ارتفاعَ الكرةِ الثانيةِ، فأَجِدُ الزمنَ الذي يتساوى عندَهُ ارتفاعُ كلٍّ منَ الكرتيْنِ، ثمَّ أَجِدُ ارتفاعَ كلِّ كرةٍ في تلكَ اللحظةِ. $t=4\ sec, y=25m$

13 ثقافةٌ ماليةٌ: بالعودةِ إلى مقدمةِ الدرسِ، أَستعملُ نظامَ المعادلاتِ المعطى لإيجادِ نقاطِ التوازنِ التي يتساوى عندَها العرضُ والطلبُ. انظر الملحق

14 أراضٍ: قطعةُ أرضٍ على شكلِ مثلثٍ مُتطابِقِ الضلعيْنِ، طولُ ضلعِهِ المُتطابِقِ 50 m، ومساحتُهُ $1200\ m^2$. أَجِدُ طولَ قاعدتِهِ، وارتفاعَهُ. انظر الملحق

مهارات التفكير العليا

15 تبريرٌ: قالَتْ زينبُ إنَّهُ لا يوجدُ حَلٌّ لنظامِ المعادلاتِ الآتي: لا يمكن إيجاد عددين مجموع مربعيهما يساوي 4، ويساوي 9 في آنٍ معًا.

$$x^2+y^2=4$$
$$x^2+y^2=9$$

هلْ قولُ زينبَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

16 مسألةٌ مفتوحةٌ: أَكتبُ نظامًا مُكوَّنًا منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ ليسَ لهُ حَلٌّ. توجد إجابات متعددة، منها: $x^2+y^2=9, x^2+y=10$

17 تحدٍّ: أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ: انظر الملحق

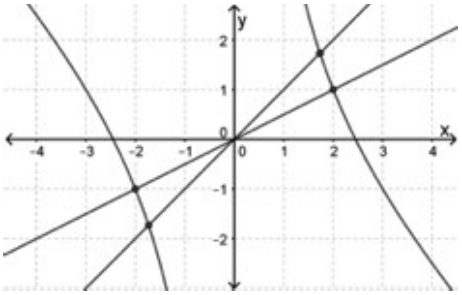
$$x^2-3xy+2y^2=0$$
$$x^2+xy=6$$

18 مسألةٌ مفتوحةٌ: أَكتبُ نظامًا منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ؛ على أنْ تكونَ النقطةُ (5, 3) أحدَ حلولِهِ.
توجد إجابات متعددة، منها: $x^2-10x+y=-22, (x-5)^2+(y-1)^2=4$

19 تحدٍّ: قطعةٌ منْ ورقٍ مُقَوّى مستطيلةُ الشكلِ، مساحتُها $216\ cm^2$، ثُنِيَ طولاها، ولُصِقا معًا، فتشكَّلَ أنبوبٌ أسطوانيٌّ حجمُهُ $224\ cm^3$. أَجِدُ بُعْدَيْ قطعةِ الورقِ. انظر الملحق

إرشادات:

- بعد حل المسألة 17، اطلب إلى الطلبة تفسير عدد الحلول، ومحاولة رسم شكل تقريبي لوضع منحنيي المعادلتين، ثم وجِّههم إلى استعمال برمجية جيوجبرا (في مختبر الحاسوب، أو في البيت، أو باستعمال هواتفهم الذكية) لتمثيل المعادلتين (انظر التمثيل المرفق).



- لحل المعادلة في السؤال 19، وجِّه الطلبة إلى استعمال برمجية جيوجبرا – إن أمكن ذلك–، ثم ناقِشهم في الحل الذي استُبعِد، وسبب استبعاده.

مهارات التفكير العليا

- اطلب إلى الطلبة حل المسائل 15, 16, 17, 18, 19 ضمن مجموعات غير متجانسة، ثم اطلب إلى أفراد بعضها توضيح كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح بقية الطلبة فرصة نقد حلول زملائهم وتقويمها.

5 الإثراء

- وجه الطلبة إلى حل النظام الآتي:

$$xy=6\ ,\ x^2+y^2=16$$

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة تنفيذ الإجراءات المكتوبة في الخطوة الثالثة؛ وذلك بكتابة نظام معادلات يُمثِّل منحنيين متقاطعين في كل صورة، ثم اختيار أحد هذه الأنظمة، وحلها جبريًّا، ثم التحقُّق من صحة الحل باستعمال برمجية جيوجبرا.
- أخبِر الطلبة أنه يمكنهم اختيار نظامين، وإيجاد حل كل منهما: أحدهما نظام يحوي معادلة خطية ومعادلة تربيعية، والآخر نظام يحوي معادلتين تربيعيتين.
- ذكِّرهم بضرورة توثيق خطوات تنفيذ المشروع بالطريقة التي يرونها مناسبة، مثل استعمال خاصية طباعة الشاشة.

6 الختام

- اطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - » ماذا يعني النظام المكون من معادلتين تربيعيتين؟
  - » ماذا يُقصَد بحل النظام؟
  - » كم عدد الحلول الممكنة لنظام مكون من معادلتين تربيعيتين؟
- استمع لإجابات أكبر عدد ممكن من الطلبة، ثم اسألهم:
  - » مَنْ يُؤيِّد الإجابة؟
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
  - » اذكر هذه الإجابة.

الدرس 3

فكرةُ الدرس

- تعرف الأسس النسبية وخصائصها.
- كتابة مقادير أسية في أبسط صورة.

التعلم القبلي:

- حل مسائل على قوانين الأسس.
- تبسيط الأسس في حدود جبرية.
- إجراء العمليات الحسابية على الأعداد النسبية.

1 التهيئة

- اكتب على اللوح تعريف الأس (القوة)، وذكِّر الطلبة بعناصرها.
- اكتب قوانين الأسس الصحيحة (integer exponents)، ووضِّحها بأمثلة.
- بيِّن كيفية تبسيط الحدود الجبرية (algebraic terms) باستعمال قوانين الأسس (exponential laws)، مُعزِّزًا ذلك بأمثلة.
- خصِّص وقتًا للإجابة عن أسئلة الطلبة.
- اكتب على اللوح عِدَّة جذور، ثم اطلب إلى الطلبة كتابتها في صورة أسس، مستعملين قوانين الأسس.
- اطلب إلى الطلبة تخمين موضوع الدرس.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
  - » أيكم شاهد حديقة مربعة؟
  - » أين شاهد ذلك؟
  - » ما قانون مساحة المربع؟ $A = L^2$
  - » ما مساحة الحديقة؟ $A = (4x^{\frac{2}{5}} y^{\frac{1}{3}} z^4)^2$
  - » هل يمكن كتابة هذا الحد الجبري بصورة أخرى؟ نعم.
  - » اذكرها. يمكن تبسيط هذا الحد، وكتابته في صورة: $A = 16x^{\frac{4}{5}} y^{\frac{2}{3}} z^8$

الدرسُ 3

تبسيطُ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ

Simplifying Exponential Expressions

فكرةُ الدرس: معرفةُ الأسسِ النسبيةِ وتبسيطُها.

المصطلحاتُ: الأُسُّ النسبيُّ.

مسألةُ اليوم: حديقةٌ مربعةُ الشكلِ، طولُ نصفِ ضلعِها مُعطًى بالحدِّ الجبريِّ $2x^{\frac{2}{5}} y^{\frac{1}{3}} z^4$، ما مساحتُها بالوحداتِ المربَّعةِ؟

مراجعةُ المفاهيم

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ a، إذا كانَ n وَ m عددينِ صحيحينِ موجبينِ $(n > 1)$، فإنَّ: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$، إلّا إذا كانتْ $a < 0$، وَ n عددًا زوجيًّا، فإنَّ الجذرَ يكونُ عددًا غيرَ حقيقيٍّ.

مثال 1

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $27^{\frac{1}{3}}$

$27^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[3]{27})^1$ بكتابةِ المقدارَ في صورةِ الجذرِ الثالثِ

$= \sqrt[3]{3\times3\times3}$ بتحليلِ العددِ 27 إلى عواملِهِ الأوليةِ

$= 3$

2) $4^{\frac{3}{2}}$

$4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3$ بكتابةِ المقدارِ في صورةِ الجذرِ التربيعي مرفوعًا للأُسِّ 3

$= (\sqrt{2\times2})^3$ بتحليلِ العددِ 4 إلى عواملِهِ الأوليةِ

$= (2)^3$

$= (2 \times 2 \times 2)$ تعريفُ الأسسِ

$= 8$

أتذكَّرُ

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ a، إذا كانَ n عددًا صحيحًا موجبًا، فإنَّ: $a^n = \underbrace{a\times a\times a\times a\times \ldots \times a}_{n \text{ مرة}}$

ويُسمّى a الأساسَ، وَ n الأُسَّ.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس بكل من اللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

3 التدريس

مثال 1

- اكتب تعريف الأس النسبي (rational exponential)، ثم وضِّحه للطلبة مُعزَّزًا بأمثلة.
- اسأل الطلبة:
  - » ما معنى تبسيط الأسس (simplifying exponents)؟ كتابتها في أبسط صورة.
  - » كيف تُبسِّط حدًّا جبريًّا مُعطًى؟ بتطبيق قوانين الأسس.
- استمع لإجابة أحد الطلبة، ثم اسأل زملاءه:
  - » مَنْ يوافقه في الرأي؟
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
- وذلك لتعزيز مهارات التواصل لدى الطلبة (التعبير عن الرأي، واحترام الرأي الآخر).
- ناقِش الطلبة في حل المثال، مُركِّزًا على تبرير كل خطوة.

إرشاد: في المثال 1، ذكِّر الطلبة أن $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$، وأن n يُسمّى دليل الجذر.

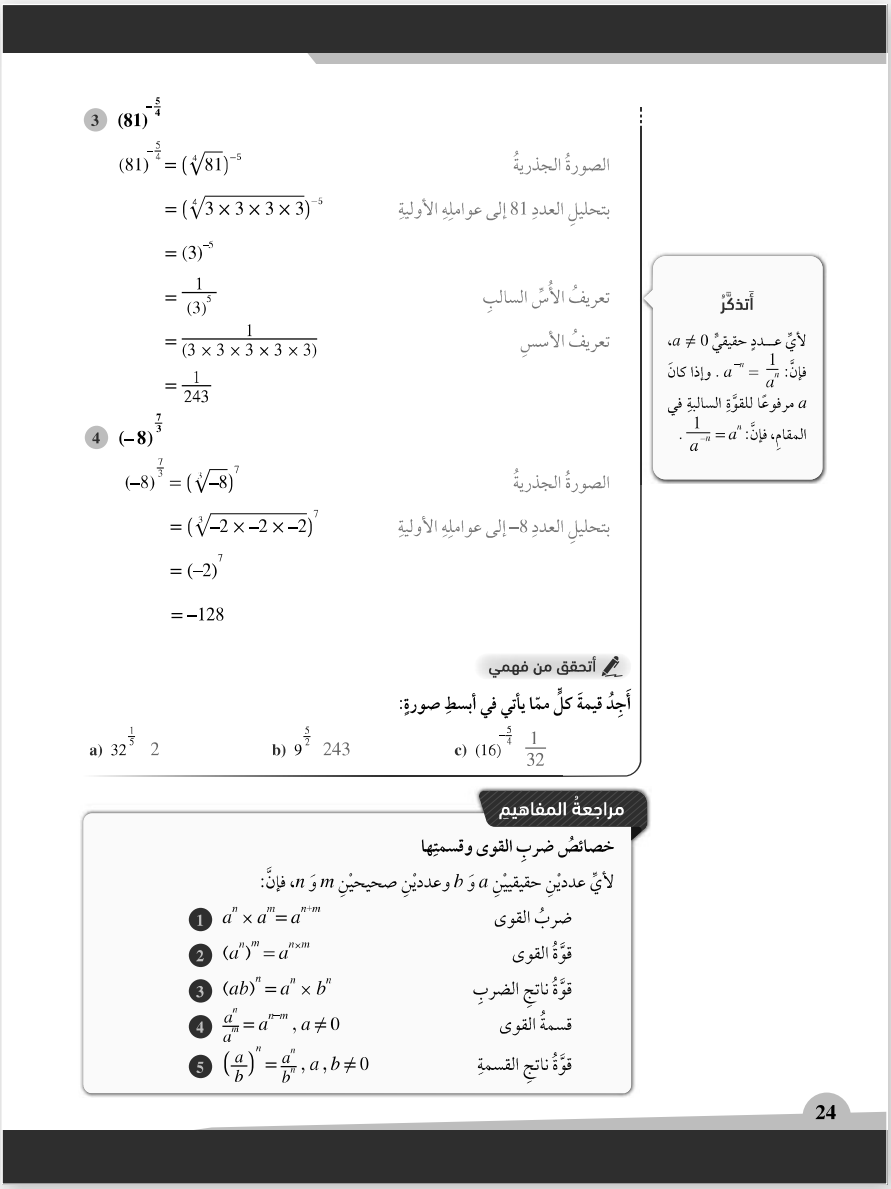
التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

إرشاد: في المثال 1، قد يواجه بعض الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في استعمال قوانين الأسس؛ لذا امنحهم بعض الوقت، وزوِّدهم بأمثلة سهلة، مُنوِّهًا إياهم بضرورة تبرير كل خطوة في الحل؛ ما يساعدهم على حفظ قوانين الأسس.

أخطاء شائعة:

- في المثال 1، قد يخطئ بعض الطلبة في دليل الجذر، فيكتبون $a^{\frac{m}{n}}$ في صورة $\sqrt[m]{a^n}$؛ لذا نبِّههم إلى خطئهم، مُبيِّنًا لهم الفرق بين a^3 ، و $a^{\frac{1}{3}}$ مثلًا.
- قد يخطئ بعض الطلبة، فيجدون الجذر التربيعي (أو أي جذر دليله زوجي) لعدد سالب؛ لذا بيِّن لهم دائمًا أنه عدد غير حقيقي، ثم اطلب إليهم ذكر مثال على عدد يُضرَب في نفسه مرتان أو أربع مرات، ويكون الناتج 16− مثلًا؛ لإقناعهم بأن ذلك غير ممكن.



3 $(81)^{-\frac{5}{4}}$

الصورةُ الجذريةُ: $(81)^{-\frac{5}{4}} = (\sqrt[4]{81})^{-5}$

بتحليلِ العددِ 81 إلى عواملِهِ الأوليةِ: $= (\sqrt[4]{3\times3\times3\times3})^{-5}$

$= (3)^{-5}$

تعريفُ الأُسِّ السالبِ: $= \frac{1}{(3)^5}$

تعريفُ الأسسِ: $= \frac{1}{(3\times3\times3\times3\times3)}$

$= \frac{1}{243}$

4 $(-8)^{\frac{7}{3}}$

الصورةُ الجذريةُ: $(-8)^{\frac{7}{3}} = (\sqrt[3]{-8})^7$

بتحليلِ العددِ 8− إلى عواملِهِ الأوليةِ: $= (\sqrt[3]{-2\times-2\times-2})^7$

$= (-2)^7$

$= -128$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $32^{\frac{1}{5}}$ 2 b) $9^{\frac{5}{2}}$ 243 c) $(16)^{-\frac{5}{4}}$ $\frac{1}{32}$

أَتذكَّرُ

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ $a \neq 0$، فإنَّ: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. وإذا كانَ a مرفوعًا للقوَّةِ السالبةِ في المقامِ، فإنَّ: $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$.

مراجعةُ المفاهيم

خصائصُ ضربِ القوى وقسمتِها

لأيِّ عددَيْنِ حقيقيَّيْنِ a وَ b وعددَيْنِ صحيحَيْنِ m وَ n، فإنَّ:

1	$a^n \times a^m = a^{n+m}$	ضربُ القوى
2	$(a^n)^m = a^{n\times m}$	قوَّةُ القوى
3	$(ab)^n = a^n \times b^n$	قوَّةُ ناتجِ الضربِ
4	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, a \neq 0$	قسمةُ القوى
5	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, a, b \neq 0$	قوَّةُ ناتجِ القسمةِ

24

تنطبـقُ خصائـصُ ضربِ القوى وقسـمتِها التي درسْـتُها سـابقًا للأسـسِ الصحيحةِ على **الأسسِ النسبيةِ** (rational exponents) أيضًا.

مثال 2

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $y^{-\frac{5}{2}} \times y^{\frac{3}{2}}$

$y^{-\frac{5}{2}} \times y^{\frac{3}{2}} = y^{-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}$ — ضربُ القوى

$= y^{-1}$ — بجمعِ الأسسِ

$= \frac{1}{y}$ — تعريفُ الأُسِّ السالبِ

2) $\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}}$ — بالتبسيطِ

$= x^{\frac{2}{3}}$

$= \sqrt[3]{x^2}$ — الصورةُ الجذريةُ

3) $(a \times b^2)^{\frac{3}{2}}$

$(a \times b^2)^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \times b^{2\times\frac{3}{2}}$ — قوّةُ ناتجِ الضربِ

$= \sqrt{a^3} \times b^3$ — الصورةُ الجذريةُ

4) $\frac{z^{\frac{7}{8}}}{z^{\frac{1}{8}}}$

$\frac{z^{\frac{7}{8}}}{z^{\frac{1}{8}}} = z^{\frac{7}{8}-\frac{1}{8}}$ — قسمةُ القوى

$= z^{\frac{6}{8}}$ — بالتبسيطِ

$= z^{\frac{3}{4}}$ — بالتبسيطِ

$= \sqrt[4]{z^3}$ — الصورةُ الجذريةُ

أَتعلَّمُ

تنقسمُ الجذورُ بحسبِ دليلِ الجـذرِ إلى نوعيْـنِ، هما: الجذورُ الفرديةُ، والجذورُ الزوجيةُ.

مثال 2

- ناقِش الطلبــة في بند (مراجعــة المفاهيم: خصائص ضرب القوى وقسمتها)، مُركِّزًا على تسمية كل قانون من قوانين الأسس؛ ليسهل عليهم حفظها.
- ابدأ حــل المثال بكتابــة التفاصيل جميعها، واســم القانون في الهامش عند استعماله.
- أكِّد للطلبة أنه يمكن اســتعمال أكثر من قانون في حل المسألة نفسها.

إرشاد: في المثال 2، قد يواجه بعض الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في إجراء العمليات على الأعداد النسبية؛ لذا ذكِّرهم بكيفية جمع الأعداد النسبية (rational numbers)، وطرحها، وضربها، وقسمتها.

تنويع التعليم:

- اطلب إلى الطلبة ذوي المســتوى المتوســط وفوق المتوسط حل السؤال الآتي:

أثبِت صحة ما يأتي:

$$\frac{x^{-3}}{x^{-\frac{5}{2}}} + x^{\frac{3}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + x^2\right)$$

الحل:

$$\frac{x^{-3}}{x^{-\frac{5}{2}}} + x^{\frac{3}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$$

$$= x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{-\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + x^2\right)$$

5 $\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\frac{3}{4}}$

$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{x^{4\times\frac{3}{4}}}{y^{2\times\frac{3}{4}}}$ قوّةُ ناتجِ القسمةِ

$= \frac{x^3}{y^{\frac{3}{2}}}$ قوّةُ القوى

$= \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^3$ الصورةُ الجذريةُ

6 $\frac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}}$

$\frac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{2}{3}}}$ تعريفُ الأُسِّ النسبيِّ

$= x^{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}$ قسمةُ القوى

$= x^{\frac{2}{15}}$ بالتبسيطِ

$= \sqrt[15]{x^2}$ الصورةُ الجذريةُ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $a^{\frac{2}{7}} \times a^{-\frac{3}{7}} \sqrt[7]{a^5}$

b) $\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{7}{5}} \frac{1}{\sqrt{x^7}}$

c) $(y \times z)^{\frac{5}{4}} \; y^{\frac{5}{4}} \times z^{\frac{5}{4}}$

d) $\frac{x^{\frac{9}{2}}}{x^{\frac{8}{5}}} \sqrt[10]{x^{29}}$

e) $\left(\frac{x}{y^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{y^3}{\sqrt{x^3}}$

f) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[7]{x^3}} \frac{1}{\sqrt[35]{x}}$

مفهومٌ أساسيٌّ

تكونُ العبارةُ الأُسِّيَّةُ في أبسطِ صورةٍ إذا:

1. ظهرَ الأساسُ مَرَّةً واحدةً، وكانَتِ الأسسُ جميعُها موجبةً.
2. لمْ تتضمَّنِ العبارةُ قوَّةَ القوى.
3. كانَتِ الكسورُ والجذورُ جميعُها في أبسطِ صورةٍ.

أخطاء مفاهيمية:

فـي المثال 2، قـد يخطئ بعض الطلبة في تبسـيط الأسس السالبة، فيسطون $\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{x^{-1}}$ إلى $x^{-\frac{3}{2}}$؛ لذا، أكِّد لهم ضرورة تغيير إشارة الأس عند نقل التعبير الأسي من المقام إلى البسـط أو العكـس، ثم تطبيق قوانين الأسس المناسبة لحالة التبسيط.

إرشادات:

- فـي المثـال 2، وضِّـح للطلبـة خاصية الأس الصفري، ثم أثبِته على اللوح.
- نوِّه لهم بأن: $1 = \frac{x^n}{x^n}$

مثال 3

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

1 $\frac{(6x^{\frac{4}{3}})(y^{\frac{-7}{5}})}{(2x^{\frac{-8}{3}})(y^{\frac{-2}{5}})}$

$\frac{6x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{7}{5}}}{2x^{\frac{-8}{3}}y^{\frac{-2}{5}}} = \left(\frac{6}{2}\right) \times \left(x^{\frac{4}{3}-\frac{-8}{3}}\right) \times \left(y^{\frac{-7}{5}-\frac{-2}{5}}\right)$ قسمةُ القوى

$= 3x^4y^{-1}$ بالتبسيطِ

$= \frac{3x^4}{y}$ الأُسُّ السالبُ

2 $\frac{(3xy^{\frac{3}{2}})(6y^{\frac{2}{5}})}{(9x^{\frac{-3}{2}})(x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{4}{10}})}$

$\frac{(3xy^{\frac{3}{2}})(6y^{\frac{2}{5}})}{(9x^{\frac{-3}{2}})(x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{4}{10}})} = \frac{3\times6}{9} \times \frac{x}{x^{\frac{-3}{2}+\frac{5}{2}}} \times \frac{y^{\frac{3}{2}+\frac{2}{5}}}{y^{\frac{4}{10}}}$ ضربُ القوى

$= 2 \times \frac{x}{x^1} \times \frac{y^{\frac{19}{10}}}{y^{\frac{4}{10}}}$ بالتبسيطِ

$= 2x^{1-1}y^{\frac{19}{10}-\frac{4}{10}}$ بقسمةِ القوى

$= 2x^0y^{\frac{3}{2}}$ تعريفُ الأُسِّ الصفريِّ

$= 2\sqrt{y^3}$ الصورةُ الجذريةُ

3 $\sqrt[3]{64x^{12}y^3}$

$\sqrt[3]{64x^{12}y^3} = (64x^{12}y^3)^{\frac{1}{3}}$ صورةُ الأُسِّ النسبيِّ

$= (64)^{\frac{1}{3}}(x)^{\frac{12}{3}}(y)^{\frac{3}{3}}$ قوّةُ ناتجِ الضربِ

$= 4x^4y$ بالتبسيطِ

أَفهمُ

إذا كانَتْ $n = m$ فإنَّ:

$1 = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^0$

إذنْ، $a^0 = 1$.

أتحقق من فهمي

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

a) $\frac{9x^{-\frac{3}{4}}y}{3x^{\frac{7}{2}}y^{-\frac{5}{3}}} \frac{3\sqrt[3]{y^8}}{\sqrt[4]{x^{17}}}$ b) $\frac{(125y^{-\frac{9}{2}})(10xy^{\frac{10}{3}})}{(5x^{\frac{5}{3}}y)(y^{-\frac{3}{7}})} \frac{250}{\sqrt{x^3}\times\sqrt[42]{y^{73}}}$ c) $\sqrt[4]{16x^{18}y^{22}}\, 2\sqrt{x^9\times y^{17}}$

مثال 3

- اشــرح ما تعنيه كتابة العبارة الأسية في أبسط صورة، مُوضِّحًا كل شرط بمثال.
- ناقِــش الطلبة في حل المثــال الثالث علــى اللوح، مُستعمِلًا قوانين الأسس النسبية، ثم اطلب إليهم تبرير كل خطوة (لماذا؟).

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأســئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حلها.
- إذا واجــه بعــض الطلبة صعوبة في حل أي مســألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.
- ناقِش الطلبة في حل الأسئلة 16,18, 20 على اللوح.

مهارات التفكير العليا

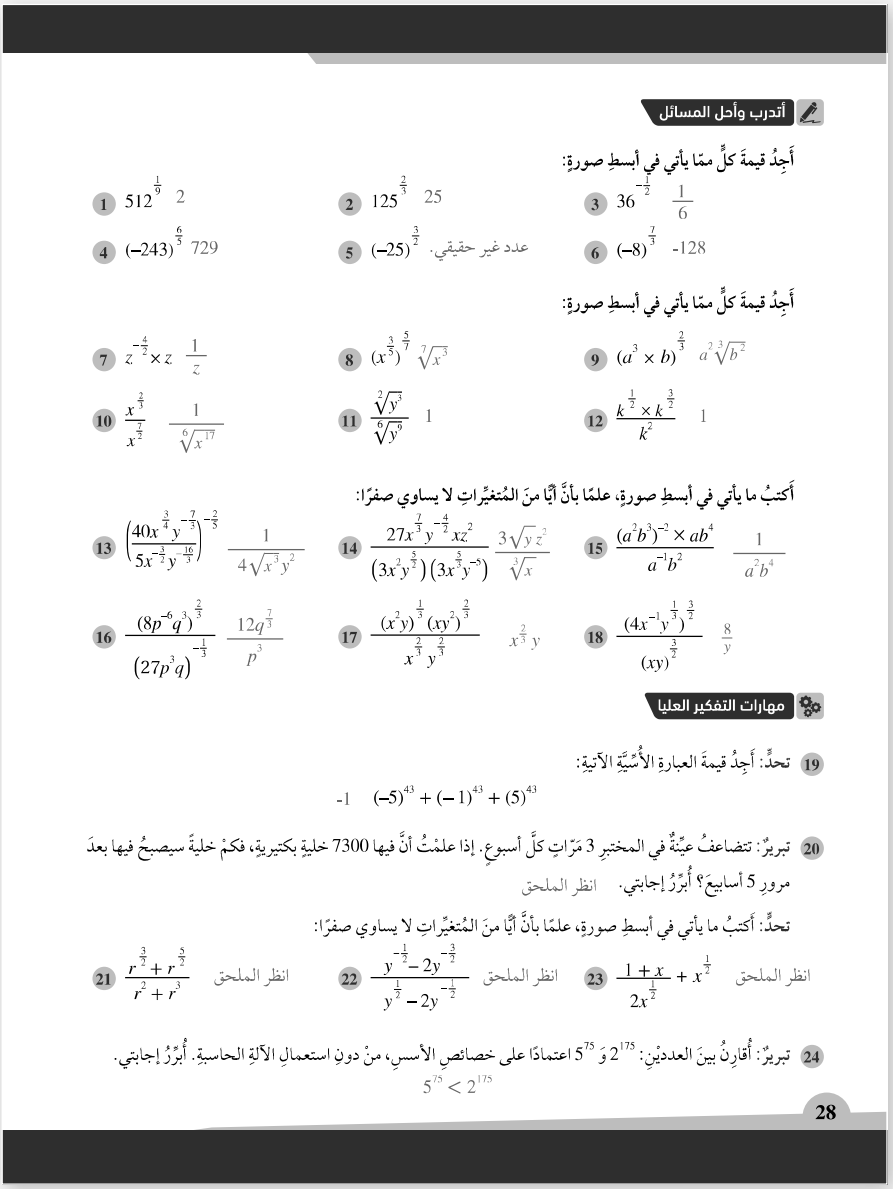
- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأســئلة في بند (مهارات التفكير العليا)، ثم اطلب إليهم حل المســائل (28–22) ضمن مجموعات.
- تجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة حلّ مســائل الــدرس جميعها من كتاب التمارين واجبًا منزليًّا، لكن حدِّدِ المسائلَ التي يمكنهم حلّها في نهاية كل حصة بحسب ما يتمّ تقديمه من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكــن أيضا إضافة المســائل التي لــم يحلّها الطلبة داخل الغرفة الصفية إلى الواجب المنزلي.

أخطاء مفاهيمية:

في المثال 3، قــد يخطئ بعض الطلبة في تبســيط العبارات الأســية ذات الاقواس، مثل: $\frac{(16p^4)^{\frac{3}{2}}}{(4p^2)^{\frac{1}{2}}}$، فلا يُطبِّقون قواعد الأســس تطبيقًا صحيحًا، ويطرحــون القوى على الرغم من عدم تســاوي الحــد الجبري في كل من البسط والمقام، أو يختصرون البسط والمقام من دون مراعاة تساوي القوى؛ لذا ذكِّرهم بقوانين الأسس، وشروط تطبيق كل منها.



أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $512^{\frac{1}{9}}$ 2
2) $125^{\frac{2}{3}}$ 25
3) $36^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{6}$
4) $(-243)^{\frac{6}{5}}$ 729
5) $(-25)^{\frac{3}{2}}$ عدد غير حقيقي.
6) $(-8)^{\frac{7}{3}}$ -128

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

7) $z^{-\frac{4}{3}} \times z$ $\frac{1}{z}$
8) $(x^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{7}}$ $\sqrt[7]{x^3}$
9) $(a^3 \times b)^{\frac{2}{3}}$ $a^2\sqrt[3]{b^2}$
10) $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{7}}}$ $\frac{1}{\sqrt[6]{x^{17}}}$
11) $\frac{\sqrt[2]{y^3}}{\sqrt[6]{y^9}}$ 1
12) $\frac{k^{\frac{1}{2}} \times k^{\frac{3}{2}}}{k^2}$ 1

أَكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

13) $\left(\frac{40x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{7}{3}}}{5x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{16}{3}}}\right)^{-\frac{2}{5}}$ $\frac{1}{4\sqrt{x^3y^2}}$
14) $\frac{27x^{\frac{7}{3}}y^{-\frac{4}{2}}xz^2}{(3x^2y^{\frac{5}{2}})(3x^{\frac{5}{3}}y^{-5})}$ $\frac{3\sqrt{yz^2}}{\sqrt[3]{x}}$
15) $\frac{(a^2b^3)^{-2} \times ab^4}{a^{-1}b^2}$ $\frac{1}{a^2b^4}$
16) $\frac{(8p^{-6}q^3)^{\frac{2}{3}}}{(27p^3q)^{-\frac{1}{3}}}$ $\frac{12q^{\frac{7}{3}}}{p^3}$
17) $\frac{(x^2y)^{\frac{1}{3}}(xy^2)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}$ $x^{\frac{2}{3}}y$
18) $\frac{(4x^{-1}y^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}}{(xy)^{\frac{3}{2}}}$ $\frac{8}{y}$

مهارات التفكير العليا

19) تحدٍّ: أَجِدُ قيمةَ العبارةِ الأُسِّيَّةِ الآتيةِ:

$(-5)^{43} + (-1)^{43} + (5)^{43}$ -1

20) تبريرٌ: تتضاعفُ عيِّنةٌ في المختبرِ 3 مَرّاتٍ كلَّ أسبوعٍ. إذا علمْتُ أنَّ فيها 7300 خليةٍ بكتيريةٍ، فكمْ خليةً سيصبحُ فيها بعدَ مرورِ 5 أسابيعَ؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر الملحق

تحدٍّ: أَكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

21) $\frac{r^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{5}{2}}}{r^2 + r^3}$ انظر الملحق
22) $\frac{y^{-\frac{1}{2}} - 2y^{-\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}} - 2y^{-\frac{1}{2}}}$ انظر الملحق
23) $\frac{1+x}{2x^{\frac{1}{2}}} + x^{\frac{1}{2}}$ انظر الملحق

24) تبريرٌ: أُقارِنُ بينَ العددَيْنِ: 2^{175} وَ 5^{75} اعتمادًا على خصائصِ الأسسِ، منْ دونِ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ. أُبرِّرُ إجابتي.

$5^{75} < 2^{175}$

28

5 الإثراء

- وجِّــه كل طالب إلى البحث في شــبكة الإنترنت عن ورقة عمل تتضمَّن تبســيط المقادير الأسية، ثم حلها وعرضها عليه؛ لتقديــم التغذية الراجعة له، ثم اطلب إليه حفظها في ملف أعمال الطالب.
- أكِّد للطلبة ضرورة توثيق مصدر ورقة العمل.

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة اســتكمال الخطــوة الثالثة والنتهاء منها، وبدء العمــل بخطوة عرض نتائج المشــروع، وإضافة كل العناصر المطلوبة فيه.
- في حال واجه الطلبة صعوبة في إعداد العرض، اطلب إليهم استعمال شــبكة الإنترنت، أو الاستعانة بمعلِّم الحاسوب.

إرشاد: ذكِّر الطلبة أنه لا يجوز الاختصار بين البسط والمقام في حالة وجود جمع أو طرح في أحدهما في الاسئلة 21, 22, 23 .

6 الختام

نشاط (مسابقة بين المجموعات):

- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة.
- اكتب على اللوح تعبيرًا أســيًّا (يمكن الاستعانة بأحد الســؤالين الآتيين، أو ما تراه مناســبًا)، ثم اطلب إلى الطلبة كتابته في أبسط صورة.

1) $(8a^6)^{\frac{1}{3}} \times (\frac{27}{a^3})^{\frac{1}{3}}$

2) $\frac{9(3a^4)^{-2}}{\sqrt{(36a^4)}}$

- المجموعة الفائزة هي التي تكتب المقدار الأســي في أبسط صورة في أسرع وقت.

الدرس 4

فكرةُ الدرسِ

- حل معادلة أسية.
- حل نظام معادلات أسية.

التعلم القبلي:

- حل المعادلة الخطية.
- حل المعادلة التربيعية.
- حل نظام من معادلتين.
- تبسيط حدود ومقادير جبرية باستعمال قوانين الأسس.

1 التهيئة

- اكتب على اللوح معادلة خطية (linear equation)، ثم اطلب إلى الطلبة حلها.
- اكتب المعادلة الخطية في صورة أس أساسه العدد 5 مثلًا، ثم اكتب الطرف الآخر؛ على أن يساوي العدد 5
- اطلب الى الطلبة اقتراح اسم المعادلة الناتجة.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.
- اطلب إلى الطلبة تخمين موضوع الدرس.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
  - هل يمكن التعبير عن نمو الزهر بمعادلة؟ نعم، $y = 2^x$
  - هل تزداد قيمة y مع ازدياد قيمة x أم تنقص؟ تزداد.
  - ما نوع المعادلة في المسألة؟ معادلة أسية.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

الدرسُ 4

حَلُّ المعادلةِ الأُسِّيَّةِ

Solving Exponential Equation

فكرةُ الدرسِ حَلُّ معادلاتٍ أُسِّيَّةٍ، حَلُّ أنظمةِ معادلاتٍ أُسِّيَّةٍ.

المصطلحاتُ المعادلةُ الأُسِّيَّةُ.

مسألةُ اليوم تستغرقُ الزنبقةُ المائيةُ 26 يومًا لتنموَ بصورةٍ كاملةٍ. إذا علمْتُ أنَّ الزهرةَ تنمو يوميًّا بمقدارِ الضِّعْفِ عنِ اليومِ السابقِ، فكمْ يومًا يَلزمُها لتصلَ إلى نصفِ مرحلةِ النموِّ؟

المعادلةُ الأُسِّيَّةُ (exponential equation) هيَ معادلةٌ تتضمَّنُ قوًى أُسسُها مُتغيِّراتٌ، ويتطلَّبُ حَلُّها كتابةَ طرفَيِ المعادلةِ بصورةِ قوَّةٍ للأساسِ نفسِهِ، ثمَّ المقارنةَ بينَ أُسَّيِ الطرفيْنِ، وَفقَ القاعدةِ التي نصُّها: "إذا تساوَتْ قوَّتانِ لهُما الأساسُ نفسُهُ، فإنَّ أُسَّيْهِما متساويانِ."

مثال 1

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

1) $5^{3x+2} = 25^{x-1}$

$5^{3x+2} = (5^2)^{x-1}$ — $5^2 = 25$

$5^{3x+2} = 5^{2(x-1)}$ — الأساسانِ متساويانِ

$3x + 2 = 2x - 2$ — بمساواةِ الأسسِ

$x = -4$ — بحَلِّ المعادلةِ

2) $8^x = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$(2^3)^x = 2 \times (2^{-1})^x$

$2^{3x} = 2 \times 2^{-x}$ — قوَّةُ القوى

$2^{3x} = 2^{-x+1}$ — ضربُ القوى

$3x = -x + 1$ — بمساواةِ الأسسِ

$x = \frac{1}{4}$ — بحَلِّ المعادلةِ

أَبحثُ: قوَّةُ العددِ 2 أوْ 2^x مهمةٌ جدًّا في علمِ الحاسوبِ، لماذا؟

29

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس بكل من اللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها.

3 التدريس

مثال 1

- ابدأ بشـــرح مفهوم المعادلة الأسية (exponential equation)، ثم اسأل الطلبة:
  - » مـــاذا يُقصَد بحـــل المعادلة الأســـية؟ إيجاد قيمة المتغير الذي يجعل المعادلة عبارة صحيحة.
  - » مَنِ اقترح طريقة لحل المعادلة الأسية؟
- استمع لإجابة أحد الطلبة، ثم اسأل زملاءه:
  - » مَنْ يوافقه في الرأي؟
  - » مَنْ لديه إجابة أخرى؟
- استمع لإجابات الطلبة، ثم قدِّم لهم التغذية الراجعة.
- ناقِـــش الطلبة في حـــل المثال، مُؤكِّـــدًا لهم ضرورة التحقُّق من صحة الحل بالتعويض في طرفي المعادلة.

إرشاد: في المثال 1، وجِّه الطلبة إلى استعمال الآلة الحاسبة للتحقُّق من صحة الحل.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوي المســـتوى دون المتوسط صعوبة في توحيد الأساس؛ فذكِّرهم بنواتج القوة (الأسس) لأعداد، مثل: 2, 3, 4, 5, 10، وشـــجِّعهم علـــى كتابتها وحفظها؛ لكي تساعدهم في أثناء الحل.

أخطاء مفاهيمية:

في المثال 1، يخطـــئ بعض الطلبة في تطبيق قوانين الأســـس عند محاولة إيجاد أساس مشترك في طرفي المعادلة. فمثلًا:

قـــد يكتبـــون $3^{4y} = 9^{y+1}$ في صـــورة $3^{4y} = 3^{2y+1}$ أو يكتبـــون $2^{x} = 16^{2x}$ فـــي صـــورة $2^{x} = 2^{4x}$ ؛ لذا اطلب إليهم استعمال الأقواس في الخطوات الأولى من الحل، وتجزئة الحل إلى خطوات، أو اســـتعمال أي طريقة يجدونها مناسبة.

3 $49^{x+1} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

صورةُ الأُسِّ النسبيِّ $(7^2)^{x+1} = \frac{7^{\frac{1}{2}}}{7}$

قوَّةُ القوى $7^{2x+2} = \frac{7^{\frac{1}{2}}}{7}$

قسمةُ القوى $7^{2x+2} = 7^{\frac{1}{2}-1}$

الأساسانِ متساويانِ $7^{2x+2} = 7^{-\frac{1}{2}}$

بمساواةِ الأسسِ $2x + 2 = -\frac{1}{2}$

بحَلِّ المعادلةِ $x = -\frac{5}{4}$

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

a) $4^{x-5} = 32^{2x+1}$ $-\frac{15}{8}$ b) $9^{x} = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ $\frac{1}{3}$ c) $625^{2x+1} = \frac{5}{\sqrt{5}}$ $-\frac{7}{16}$

مفهومٌ أساسيٌّ

الصيغـــةُ العامـــةُ للاقترانِ الأُسِّـــيِّ هـــيَ: $y = a(b)^x$ ، حيـــثُ a وَ b عـــددانِ حقيقيانِ، وَ $a \neq 0, b \neq 1, b > 0$

مثال 2: من الحياة

بدأَتْ دعاءُ تجربتَها في مختبرِ العلومِ باســـتعمالِ 5000 خليةٍ بكتيريةٍ. وبعدَ مرورِ 3 ســـاعاتٍ لاحظَتْ أنَّ عددَ الخلايا البكتيريةِ قدْ أصبحَ 11000 خليةً، وأنَّ عددَها كانَ يتغيَّرُ بالنسبةِ نفسِها كلَّ ساعةٍ. أَكتبُ اقترانًا أُسِّيًّا يُمثِّلُ عددَ الخلايا البكتيريةِ بعدَ أيِّ عددٍ منَ الساعاتِ، ثمَّ أستعملُهُ لإيجادِ عددِ الخلايا البكتيريةِ بعدَ 12 ساعةً.

قدْ يحتوي الغرامُ الواحدُ منَ التربةِ علـــى نحوِ 10^{10} خلايا بكتيريةٍ مختلفةِ الأنواعِ.

أولًا: أَجِدُ الاقترانَ الأُسِّـــيَّ الذي يُمثِّلُ عددَ الخلايا البكتيريةِ بعدَ أيِّ عددٍ منَ الســـاعاتِ. في الصيغةِ العامةِ للاقترانِ الأُسِّـــيِّ، يوجدُ مُتغيِّرانِ x, y، وهما يُمثِّلانِ الزمنَ وعددَ الخلايا البكتيريةِ في تجربةِ دعاءَ. أَفترضُ أنَّ الزمنَ هوَ x ، وأنَّ عددَ الخلايا البكتيريةِ هوَ y.

بدأَتْ دعاءُ تجربتَها عندَ الزمنِ $x = 0$ ، مُستعمِلةً 5000 خليةٍ بكتيريةٍ؛ أيْ:

الصيغةُ العامةُ للاقترانِ الأُسّيِّ $y = a\,(b)^x$

بتعويضِ قيمةِ $x = 0$، وقيمةِ $y = 5000$ $5000 = a(b)^0$

$b^0 = 1$ $a = 5000$

بتعويضِ قيمةِ a $y = 5000\,(b)^x$

عندَ الزمنِ $x = 3$ أصبحَ العددُ 11000 خليةً بكتيريةً؛ أيْ:

بالتعويضِ $11000 = 5000\,(b)^3$

بقسمةِ كلا الطرفيْنِ على 5000 $\frac{11000}{5000} = b^3$

الجذرُ التكعيبيُّ للطرفيْنِ $b = \sqrt[3]{\frac{11000}{5000}}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $b \approx 1.3$

إذنْ، يُمكِنُني التعبيرُ عنْ عددِ الخلايا البكتيريةِ بعدَ x منَ الساعاتِ بالاقترانِ الأُسّيِّ:

$$y = 5000\,(1.3)^x$$

ثانيًا: أَجِدُ عددَ الخلايا البكتيريةِ بعدَ 12 ساعةً:

أُعوِّضُ $x = 12$ في الاقترانِ $y = 5000\,(1.3)^{12}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $y \approx 116490$

أَتعلَّمُ

لإيجادِ قيمةِ $(1.3)^{12}$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أضغطُ على الأزرارِ:

أتحقق من فهمي

بلـغَ عددُ الزائريـنَ لموقعٍ تعلُّميٍّ على شـبكةِ الإنترنتْ 579 زائرًا في اليومِ الأولِ منْ إنشـاءِ الموقعِ، وفـي اليومِ التالي زادَ العددُ ليصلَ إلى 1386 زائرًا. إذا كانَ عددُ الزُّوّارِ يتغيَّرُ بالنسـبةِ نفسِها كلَّ يومٍ، فأَكتبُ المعادلةَ الأُسّيَّةَ التي تُمثِّلُ عددَ زائري الموقعِ بعدَ أيِّ عددٍ منَ الأيامِ، ثمَّ أستعملُها لإيجادِ عددِهِمْ بعدَ 10 أيامٍ.

$y = 579\,(2.4)^{x-1}$

بعد 10 أيام يصبح العدد 1494310 زائرًا.

نما عددُ مُستخدِمي المواقعِ التعليميةِ بما نسبتُهُ 900% منذُ عامِ 2000م.

يُستعمَلُ القانونُ $A = p(1 + r)^n$ لحسابِ جملةِ المبلغِ (المبلغُ بعدَ استثمارِهِ) في حالةِ الربحِ المُرَكَّبِ، حيثُ يُمثِّلُ A جملةَ المبلغِ، وَ p المبلغَ الحاليَّ (المبلغُ المرادُ استثمارُهُ)، وَ r نسبةَ الربحِ، وَ n الزمنَ بالسنواتِ.

مثال 2: من الحياة

- اكتب على اللوح الصيغة العامة للاقتران الأسي (exponential function)، ثم بيِّن للطلبة عناصرها.
- اطلب إلى الطلبة تحديد المعطيات والمطلوب في المثال؛ لفهم المسألة قبل حلها.
- ناقِش الطلبة في خطوات الحل على اللوح، واطلب إليهم تبرير كل خطوة.

إرشادات:

- في المثال 2 ، قد يواجه بعض الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في تكوين المعادلة؛ لذا ساعدهم على تحديد القيم المعطاة في المسألة، وما تُمثِّله من متغيرات في الصيغة العامة للاقتران الأسي.
- وجِّه الطلبة إلى استعمال الآلة الحاسبة؛ لمساعدتهم في أثناء الحل، ودرِّبهم على استعمالها بصورة صحيحة.

مثال 3: من الحياة

استثمرَ سليمانُ 6000 دينارٍ في شركةٍ صناعيةٍ، بنسبةِ ربحٍ مقدارُها 20%، وقدْ أصبحَ المبلغُ بعدَ n منَ السنينَ 10368 دينارًا. أَجِدُ الزمنَ n.

قانونُ جملةِ المبلغِ	$A = p(1+r)^n$
بالتعويضِ	$10368 = 6000\,(1+0.2)^n$
بالقسمةِ على 6000	$\frac{216}{125} = (1.2)^n$
بالتبسيطِ	$(\frac{6}{5})^3 = (1.2)^n$
الأساساتِ متساويانِ	$(1.2)^3 = (1.2)^n$
بمساواةِ الأسسِ	$n = 3$

إذنْ، استثمرَ سليمانُ المبلغَ مدَّةَ 3 سنواتٍ.

أتذكَّرُ

لتحويلِ 20% إلى كسرٍ عشريٍّ، أَقسِمُ على 100،

$20\% = \frac{20}{100} = 0.2$

أتحقق من فهمي

اشترتْ غيداءُ أسهمًا بمبلغ 50000 دينارٍ، بنسبةِ ربحٍ بلغَتْ 10%، وقدْ أصبحَ المبلغُ 60500 دينارٍ بعدَ n منَ السنواتِ. أَجِدُ الزمنَ n.

$60500 = 50000(1.1)^x$

$x = 2$

يُمكِنُني حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ أُسّيَّتيْنِ بكتابةِ طرفَيِ المعادلةِ الأولى في صورةِ قوَّةٍ للأساسِ نفسِهِ، ثمَّ مساواةِ أُسَّيِ الطرفيْنِ، ثمَّ تكرارِ ذلكَ في المعادلةِ الثانيةِ، فيتكوَّنُ نظامٌ منْ معادلتيْنِ.

مثال 4

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$4^{2x} \times 2^y = 64$$
$$9^x \times 3^y = 81$$

المعادلةُ الأُسّيَّةُ الأولى	$4^{2x} \times 2^y = 64$
بتحليلِ العددينِ 4 وَ64 إلى عواملِهما الأوليةِ	$(2^2)^{2x} \times 2^y = 2^6$
قوَّةُ القوى	$2^{4x} \times 2^y = 2^6$
ضربُ القوى	$2^{4x+y} = 2^6$
بمساواةِ الأسسِ	$4x + y = 6$

مثال 3: من الحياة

- وضِّح للطلبة مفهوم جملة المبلغ في حالة الربح المُركَّب، مُبيِّنًا لهم أنه من التطبيقات المهمة للمعادلة الأسية.
- ناقِش الطلبة في خطوات الحل على اللوح، واطلب إليهم تبرير كل خطوة.
- أكِّد لهم ضرورة التحقُّق من صحة الحل؛ بالتعويض في المعادلة.

مثال 4

- وضِّح للطلبة مفهوم نظام المعادلات الأسية، وكيفية حله بطرح الأسئلة الآتية:
  - » ماذا يعني لك اسم (نظام من معادلتين أسيتين)؟
  - » كم متغيرًا فيه؟
  - » ما معنى حل نظام المعادلات الأسية؟
  - » اقترح طريقة لحل النظام.
  - » مَنْ لديه طريقة أخرى؟
- استمع لإجابات الطلبة، وقدِّم لهم التغذية الراجعة، ثم وضِّح مفهوم نظام المعادلتين الأسيتين، وكيفية حله.
- ناقِش الطلبة في خطوات الحل على اللوح، واطلب إليهم تبرير كل خطوة.
- أكِّد لهم ضرورة التحقُّق من صحة الحل؛ بالتعويض في المعادلتين.

إرشاد:

- في المثال 4، قد يواجه بعض الطلبة صعوبة في حل نظام المعادلات باستعمال طريقة الحذف (elimination)، أو التعويض (substitute)؛ لذا ذكِّرهم بهاتين الطريقتين بذكر مثال بسيط.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (أتدرب وأحل المسائل)، ثم اطلب إليهم حلها.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة حلّ مسائل الدرس جميعها من كتاب التمارين واجبًا منزليًّا، لكن حدِّدِ المسائلَ التي يمكنهم حلّها في نهاية كل حصة بحسب ما يتمّ تقديمه من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضا إضافة المسائل التي لم يحلّها الطلبة داخل الغرفة الصفية إلى الواجب المنزلي.

مهارات التفكير العليا

- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، ثم وجِّههم إلى حل المسائل.
- ناقِش أفراد كل مجموعة في إجاباتها.
- اطلب إلى أفراد كل مجموعة تبرير حلهم في كل مسألة (يمكن توجيه أفراد كل مجموعة إلى تقييم حل أفراد مجموعة أخرى).
- استمع لإجابات أفراد المجموعات، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.

بتطبيقِ الخطواتِ نفسِها على المعادلةِ الثانيةِ تنتجُ المعادلةُ الخطِّيَّةُ $2x + y = 4$

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الخطِّيَّ الناتجَ بالحذفِ:

$$\begin{array}{rll} 4x + y = 6 & & \\ (-)\quad 2x + y = 4 & & \text{بطرحِ المعادلتَيْنِ} \\ \hline 2x = 2 & & \\ x = 1 & & \text{بالقسمةِ على 2} \\ 4(1) + y = 6 & & \text{بتعويضِ قيمةِ } x \text{ في المعادلةِ الثانيةِ} \\ 4 + y = 6 & & \\ y = 2 & & \text{بحَلِّ المعادلةِ} \end{array}$$

إذنْ، حَلُّ نظامِ المعادلاتِ هوَ: $x = 1 , y = 2$

أَتذكَّرُ

يُمكِنُني حَلُّ نظامِ المعادلاتِ الخطِّيِّ بالحذفِ، أوِ التعويضِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ: $\left(\frac{13}{5}, -\frac{1}{10}\right)$

$$\frac{4^x}{256^y} = 64$$

$$3^{2x} \times 9^y = 243$$

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

1. $64 = (32)^{3-x}$ $\frac{9}{5}$
2. $81^{5x+1} = 27^{4x-3}$ $-\frac{13}{8}$
3. $128^{x-5} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ $\frac{71}{14}$
4. $64^{7x+1} = \frac{2}{16^{4x-3}}$ $\frac{7}{58}$
5. $\left(\frac{11}{\sqrt{11}}\right)^{3x+1} = (11)^{x+7}$ 3.75
6. $(\sqrt{7})^{4x+5} = \left(\frac{\sqrt{28}}{2}\right)^{7x-2}$ $\frac{7}{11}$
7. $9^{x^2} \times 27^{x^2} = 243$ $x = \pm 1$
8. $5^{2x} \times 25^{x} = 125$ $\frac{3}{4}$
9. $2^{x^2} \times 2^{6x} = \frac{1}{32}$ -1 , -5

أَحُلُّ أنظمةَ المعادلاتِ الآتيةَ:

10. $5^y = 25^{x-3}$
    $125^y = 25^{x-1}$ $x = 4, y = 2$
11. $3^y = 3^{2x+y}$
    $27^y = 27^{x+3}$ $x = 0, y = 3$
12. $5^{2x} \times 25^y = 125$
    $\frac{8^x}{2^y} = 16$ $x = \frac{11}{8}, y = \frac{1}{8}$

13 $9^{2-x} = 81^{6y}$ $x = -\frac{16}{3}, y = \frac{7}{26}$ 14 $\frac{16^{-x}}{64^{-3x}} = 16^{-3y-3}$ 15 $\frac{1}{27} \times 9^{2-n} = 3^{m^2-2}$

$\left(\frac{1}{216}\right)^{-2x-3} = 36^{3y}$ $8^{x^2} = \left(\frac{1}{2^{x+1}}\right)^2$ $(0,-1), (\frac{7}{9}, -\frac{103}{54})$ $2^{m^2} \times 2^n = 64$

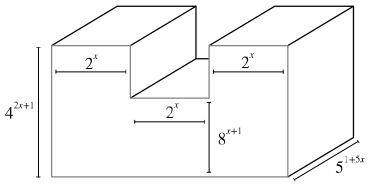
$(m,n) = (-3,3), (3,-3)$

16 ثقافةٌ ماليةٌ: يتضاعفُ مبلغٌ يستثمرُهُ عليٌّ 3 أضعافٍ كلَّ شهرٍ. إذا أصبحَ المبلغُ بعدَ 4 شهور 1701 دينارًا، فكمْ دينارًا كانَ رأسُ المالِ؟ انظر الملحق

17 سيارةٌ: اشترى سعيدٌ سيارةً بمبلغِ 15000 دينارٍ. إذا قَلَّتْ قيمةُ السيارةِ بنسبةِ 20% سنويًّا، فبعدَ كمْ سنةٍ تصبحُ قيمتُها 6144 دينارًا؟ بعد 4 سنوات

18 بكتيريا: يُمثِّلُ المقدارُ 3^{t-2} عددَ الخلايا البكتيريةِ في تجربةٍ مخبريةٍ بعدَ مرورِ t منَ الساعاتِ. ما الزمنُ اللازمُ ليصبحَ عددُ الخلايا البكتيريةِ 2187 خليةً؟ انظر الملحق

19 هندسةٌ: أَكتبُ في أبسطِ صورةٍ عبارةً أُسِّيَّةً تُمثِّلُ حجمَ الشكلِ الآتي. انظر الملحق



مهارات التفكير العليا 20 - 23 انظر الملحق

20 تبريرٌ: هلْ يُمكِنُ حَلُّ المعادلةِ الأُسِّيَّةِ الآتيةِ: $1 = 2^x + 2$ ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

21 تبريرٌ: أَحُلُّ المعادلةَ الآتيةَ، مُبرِّرًا خطواتِ الحَلِّ.

$$x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} = 4$$

22 تحدٍّ: ما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y في المعادلةِ الآتيةِ:

$$\frac{36^{x-y+1}}{54^{x+y-1}} = 48^{x+y}$$

23 تحدٍّ: أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الأُسِّيَّةِ الآتيَ:

$$2^x + 3^y = 10$$
$$2^{x+1} + 3^{y+1} = 29$$

5 الإثراء

- حُلَّ المعادلة الأسية: $2^{2x} - 2^{x+4} + 64 = 0$
- حُلَّ نظام المعادلات الآتي:

$$\frac{16^{4x-1}}{64^{y-2}} = 4^{y+x}$$

$$\frac{(625^{-\frac{x}{2}})^{4-y}}{64^{y-2}} = 5^{2x+4y}$$

تعليمات المشروع:

- ذكِّر الطلبة بقرب موعد عرض نتائج المشروع، ووجوب الانتهاء من تجهيزه، والتحقُّق من توافر العناصر المطلوبة جميعها؛ استعدادًا لعرضه.
- ذكِّر الطلبة بأداة تقييم المشروع الواردة في بداية الوحدة.

6 الختام

مسابقة (التحديات الثلاثة):

- أحضِر ثلاثة صناديق، ثم اكتب على الأول عبارة: (التحدي 1)، واكتب على الثاني عبارة: (التحدي 2)، واكتب على الثالث عبارة: (التحدي 3).
- ضع مجموعة من الأوراق في كل صندوق، كُتِب في كل منها سؤال مناسب (استعن بالجدول الآتي).

» حل المعادلة: ..... .

التحدي 1	**a)** $x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$ **b)** $x^{-\frac{1}{2}} = 25x^{\frac{3}{2}}$ **c)** $x^{2x-1} = 3^{x+1}$ **d)** $2^{2y} \times 2^{2-y} = 2^{-y}$
التحدي 2	**a)** $25^{2x} = 5^{1-x}$ **b)** $81^{-\frac{y}{2}} = 27^{2y+1}$ **c)** $(\frac{1}{4096})^{-\frac{y}{z}} = 16^{2z-1}$
التحدي 3	**a)** $2^{\frac{1}{2-x}} \times 3^{2x} = 108$ **b)** $1875 = 3^{2x-1} \times 5^{3+x}$ **c)** $2^{3x+1} \times 5^{5+2x} = 800$

- قسِّم مجموعة من طلبة الصف إلى فريقين (كل فريق يتألَّف من 5 طلبة).
- اطلب إلى أفراد كل مجموعة ترشيح متسابق من فريقهم لسحب ورقة من صندوق (التحدي 1)، ثم حل السؤال المكتوب في الورقة خلال دقيقتين.
- يحصل الفريق الذي إجابته صحيحة على نقطة.
- كرِّر الخطوة السابقة للصندوق الثاني، ثم الثالث مع متابعة تسجيل النقاط.
- الفريق الفائز هو الذي يجمع نقاطًا أكثرَ.

الوحدةُ 1

التقويم الختامي:

- وزِّع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، ثم وزِّع على كل منها الأسئلة (18-1).
- اطلب إلى أفراد كل مجموعة مناقشة إجابات الأسئلة الخاصة بهم.
- تجوَّل بين أفراد المجموعات مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- ناقِش أفراد المجموعات في حل بعض المسائل على اللوح.

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

عرِّف الطلبة بالاختبارات الدولية، مُبيِّنًا لهم أهميتها مستعينًا بالمعلومة أدناه، ثم وجِّههم إلى حل الأسئلة في بند (تدريب على الاختبارات الدولية) بصورة فردية، ثم ناقِشهم في إجاباتها على اللوح.

يتقدم طلبة الصف العاشر في الأردن لاختبار البرنامج الدولي لتقييم أداء الطلب(PISA) في مجالات القراءة والرياضيات والعلوم، وفيما يخص الرياضيات فإن المعرفة الرياضية وفق هذا البرنامج يُعبّر عنها بمدى قدرة الفرد على صياغة، وتوظيف، وتفسير الرياضيات في أوضاع مختلفة، إذ تتضمن القدرة على التفكير الرياضي واستخدام المفاهيم والإجراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر والتنبؤ بها. و تسعى لمساعدة صانعي القرارات وراسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقية وواقعية لأداء نظمها التربوية، وتعينهم في تقييم النجاحات أو الإخفاقات، وهذه الدراسات والبرامج يشارك الأردن في دوراتها بانتظام منذ أوائل تسعينات القرن العشرين. عليك عزيزي المعلم تشجيع الطلبة على الاهتمام بحل مثل هذه الأسئلة والاهتمام بالمشاركة في الدراسات وبرامج القييم الدولية بكل جدية، وتضمين امتحاناتك المدرسية مثل نوعية هذه الأسئلة.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَحُلُّ كلَّ نظامٍ معادلاتٍ ممّا يأتي، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحلِّ:

1. $y = 4x$, $y = 5 - x^2$ — $(1,4), (-5,-20)$
2. $y - x = 15$, $x^2 + y^2 = 64$ — لا يوجد حل للنظام.
3. $y = x^2 - 4x + 5$, $y = -x^2 + 5$ — $(2,1), (0,5)$
4. $y = -x^2 - x + 12$, $y = x^2 + 7x + 12$ — $(-4,0), (0,12)$

إذا كانَ c ثابتًا في نظامِ المعادلاتِ الآتي، فأَجِدُ:

$$3x - 2y = 7$$
$$x^2 - y^2 = c$$

5. حَلَّ هذا النظامِ، علمًا بأنَّ $c = 8$ — $(3,1), (5.4, 4.6)$
6. جميعَ قيمِ c الممكنةِ التي لا تجعلُ للنظامِ أيَّ حَلٍّ. — $c \geq 10$
7. أجدُ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ: $3 - 7y < 6x^2$ بحلِّ نظامِ المعادلاتِ الآتي: انظر الملحق

$$y = 3 - 7x$$
$$y = 6x^2$$

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

8. $\frac{2}{2^3 \times 2^{-4}}$ — 4
9. $\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$ — $\frac{16}{9}$
10. $\frac{(16p^4q^{-2})^{-\frac{3}{2}}}{(64p^2q^{-1})^{-\frac{1}{2}}}$ — $\frac{\sqrt[2]{q^5}}{8p^5}$
11. $\frac{(27a^{\frac{3}{2}}b^{-6})^{-\frac{1}{3}}}{(729a^4b^{-2})^{-\frac{1}{2}}}$ — $3\sqrt{a^3}b$

تحدٍّ: أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ a وَ b في كلٍّ ممّا يأتي:

12. $3^a x^b = \frac{27x^{\frac{7}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ — $a = 3, b = \frac{11}{6}$
13. $\frac{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{x - x^2} = x^a$ — $a = -0.5$

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ الأُسِّيَّةِ الآتيةِ:

14. $5^{\frac{t}{2}} = 5^{2t-1}$ — $t = \frac{2}{3}$
15. $27^{-\frac{1}{c}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{c-\frac{5}{2}}$ — $c = -\frac{1}{2}, 3$
16. $432 = 3^{x+1} \times 2^{2x}$ — $x = 2$
17. $500 = \frac{2^{\frac{1}{2}-x}}{5^{2x}}$ — $x = -1.5$

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي:

18. $36^{x+4} = 6^y$, $36^y = 36^{x+6}$ — $(-2,4)$
19. $5^{2x+4} = 5^{y-3}$, $7^{y-x} = 49$ — $(-5,-3)$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

20. أيُّ الأزواجِ المُرتَّبةِ الآتيةِ تُمثِّلُ حَلًّا لنظامِ المعادلاتِ: c

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$3x + y = 6$$

a) $(1,3)$ b) $(0,2)$ c) $(2,0)$ d) $(-2,-2)$

21. العبارةُ الجبريةُ التي يجبُ وضعُها في المربَّعِ الفارغِ للمعادلةِ $\frac{8x^2y^3}{\square} = \left(\frac{2y}{x}\right)^2$ هيَ: a

a) $2x^4y$ b) $4x^4y^2$ c) $2xy$ d) x^2y^2

22. أَجِدُ جميعَ قيمِ p التي تجعلُ منحنى المعادلةِ الخطِّيةِ $y = 2x + p$ لا يقطعُ منحنى المعادلةِ $y = x^2 + 3x - 1$. $p \leq -2$

كتاب التمارين

الدرسُ 1 حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ ومعادلةٍ تربيعيةٍ

الوحدةُ 1: الأسسُ والمعادلاتُ

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1. $y = 7x + 15$, $y = 3x^2 + 5x - 2$ — $(-2.07, 0.5)$
2. $y - x = 1$, $y = 2x^2 - 11x + 16$ — $(1.77, 2.775), (4.22, 5.22)$
3. $y - x = 10$, $x^2 + y^2 = 50$ — $(-5, 5)$
4. $x + y = 20$, $x^2 - y^2 = 16$ — $(10.4, 9.6)$
5. $y - x = 0$, $y = x^2 + 3x + 2$ — لا يوجد حل للنظام.
6. $y = 2x - 5$, $y = x^2 - 2x$ — لا يوجد حل للنظام.
7. $y = x - 1$, $y = x^2 - 3x + 2$ — $(1, 0), (3, 2)$
8. $y - 2x = 1$, $y = 5x^2 + 4y - 1$ — $(-0.86, -0.73), (0.46, 1.93)$
9. $y - x + 1 = 0$, $y = x^2 + 3x$ — لا يوجد حل للنظام.
10. $y = 2$, $x^2 + y^2 = 4$ — $(0, 2)$
11. $y - x = 1$, $y = x^2 + 6x + 8$ — لا يوجد حل للنظام.
12. $y = 2 - 3x$, $y = x^2 - 4x + 3$ — لا يوجد حل للنظام.

13. حدائقُ: حديقةٌ مستطيلةُ الشكلِ، طولُ قُطرِها 30 m، ومحيطُها 84 m. أَجِدُ بُعْدَيْها.
$x^2 + y^2 = 900$, $2x + 2y = 84$, $\Rightarrow (x, y) = (24, 18)$

14. سَجّادٌ: اشترَتْ ليلى سَجّادةً مستطيلةَ الشكلِ، طولُ قُطرِها $\frac{1}{2}\sqrt{34}$ m، ومحيطُها 8 m. أَجِدُ بُعْدَيْها.
$x^2 + y^2 = \frac{\sqrt{34}}{2}$, $2x + 2y = 8$, $(x, y) = (2.5, 1.5)$

15. اسْتِثْمارٌ: إذا كانَ الفرقُ بينَ المبلغِ الذي ادَّخَرَتْهُ رزانُ والمبلغُ الذي ادَّخَرَتْهُ أختُها هديلُ هوَ ديناريْنِ، وكانَ مجموعُ مربَّعَيْ ما معَهُما 74 دينارًا، فكمْ دينارًا ادَّخَرَتْ كلٌّ منْهُما؟
$x - y = 2$, $x^2 + y^2 = 74$, $(x, y) = (7, 5)$

16. نقودٌ: قالَ مازنٌ إنَّ مجموعَ مالديَّ ولدى أخي منْ نقودٍ هوَ 7 دنانيرَ، وإنَّ الفرقَ بينَ مربَّعَيْ ما معَنا هوَ 7 دنانيرَ. كمْ دينارًا معَ مازنٍ وأخيهِ؟ $(4, 3)$

17. إذا كانَ المستقيمُ $y = 3x - 4$ يقطعُ المنحنى $y = x^2 - px + 4$ في نقطتيْنِ، فما قيمةُ P؟ انظر ملحق الإجابات

الدرسُ 2 حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ

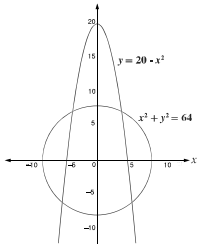
الوحدةُ 1: الأسسُ والمعادلاتُ

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1. $y = x^2 - 6x + 9$, $y = x^2 - 3x$ — $(3, 0)$
2. $y - 3x^2 = x + 2$, $y = -6x^2 + 7x$ — لا يوجد حل
3. $y = 0.5x^2 + 0.5x + 1$, $y = -x^2 + 2x + 4$ — $(2, 4), (-1, 1)$
4. $y = 2x^2 + 8x + 4$, $y = x^2 + 2x + 4$ — $(0, 4), (-6, 28)$
5. $y - x^2 = 0$, $y + x^2 = 0$ — $(0, 0)$
6. $y = x^2 + x - 1$, $y = 5 - x^2$ — $(1.5, 2.75), (-2, 1)$
7. $y = x^2 + x + 2$, $y + x^2 + 2 = 0$ — لا يوجد حل
8. $y = x^2 + 2x + 2$, $y = -x^2 - 2x + 2$ — $(0, 2), (-2, 2)$
9. $y = -x^2 + 2x + 2$, $y = -x^2 - 2x + 2$ — $(0, 2)$
10. $y^2 = -x^2 + 4$, $y = 0.5x^2 - 2$ — $(0, -2), (-2, 0), (2, 0)$
11. $4y + 9x^2 = 25$, $y - x^2 = 3x - 4$ — $(1.3, 1.57), (0.46, -2.4)$
12. $x^2 + y^2 = 16$, $y^2 = (x - 3)^2$ — $(3.91, 0.83), (1.03, 3.86)$

13. كرةٌ طائرةٌ: في أثناءِ لعبِ سباحةٍ وهندَ كرةَ الطائرةِ، رمَتْ ساميةُ الكرةَ على شكلٍ منحنًى معادلتُهُ $y = -x^2 + 3$، ثمَّ رمَتْ هندُ الكرةَ على شكلٍ منحنًى معادلتُهُ $y = -x^2 + 2x$. أَجِدُ إحداثياتِ نقطةِ التقاءِ الكرتيْنِ.
$(1.5, 0.75)$

14. أبراجٌ: أرادَ مركزُ حراسةٍ إيجادَ نقاطِ التقاطعِ المُبيَّنةِ في الشكلِ المجاورِ لتركيبِ أبراجِ مراقبةٍ عندها. أَجِدُ إحداثياتِ هذِهِ النقاطِ.
$(3.58, 7.15), (-3.58, 7.15), (5.11, -6.15), (-5.11, -6.15)$



إرشاد: لحل المسائل 11 ، 12 ، 13 ، 14، استعمل القانون العام والآلة الحاسبة.

الدرسُ 3 تبسيطُ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ

الوحدةُ 1: الأسسُ والمعادلاتُ

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1. $16^{\frac{1}{4}}$ 2
2. $36^{\frac{1}{2}}$ 216
3. $32^{-\frac{2}{5}}$ $\frac{1}{8}$
4. $(81)^{\frac{1}{4}}$ 3
5. $(-27)^{\frac{2}{3}}$ 9
6. $(-64)^{\frac{2}{3}}$ 16
7. $1^{-\frac{3}{4}}$ 1
8. $25^{-\frac{3}{2}}$ $\frac{1}{125}$

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

9. $y^{\frac{4}{7}} \times y^{-\frac{3}{7}}$ $\frac{1}{y^{\frac{1}{7}}}$
10. $z^{\frac{1}{7}} \times z^{-\frac{3}{7}}$ $z^{\frac{2}{7}}$
11. $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}$ $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$
12. $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$
13. $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{1}{3}}}$ $x^{\frac{1}{3}}$
14. $\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{-\frac{1}{4}}}$ x
15. $\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$
16. $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4}}$ $\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

17. $\frac{8x^{-\frac{4}{7}}y^{\frac{1}{7}}}{2x^{\frac{2}{7}}y}$ $\frac{4}{x^{\frac{6}{7}}y^{\frac{6}{7}}}$
18. $\frac{10xy^{-\frac{3}{4}}}{5x^{-\frac{2}{4}}y^{\frac{4}{4}}}$ $\frac{2x^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{1}{4}}}$
19. $\frac{(4y^{-\frac{4}{3}}) \times (24xy^{\frac{3}{3}})}{(2x^{\frac{3}{3}}y)(y^{-\frac{2}{3}})}$ $\frac{48y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$
20. $\frac{(125y^{-\frac{2}{3}}) \times (10x^{\frac{3}{3}}y^{\frac{1}{3}})}{(5xy^{-\frac{2}{3}})(y^{-\frac{1}{3}})}$ $\frac{250y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$
21. $\sqrt[4]{2x^{12}y^8}$ $\sqrt[4]{2}x^3y^2$
22. $\sqrt{9x^8y^4}$ $3x^4y^2$

23. بكتيريا: تتضاعفُ عيِّنةٌ بكتيريا مخبريةٌ 4 مرّاتٍ كلَّ أسبوعٍ. إذا كانَ في العيِّنةِ 3500 خليةٍ بكتيريةٍ اليومَ، فكمْ يصبحُ عددُها بعدَ مرورِ 7 أسابيعَ؟ 57344000

24. تجارةٌ: يتضاعفُ ثمنُ قطعةِ أرضٍ سنويًّا بمقدارِ الضعفِ. كمْ سيصبحُ ثمنُها بعدَ 3 سنواتٍ، علمًا بأنَّ ثمنَها اليومَ 5000 دينارٍ؟ 40000

الدرسُ 4 حَلُّ المعادلةِ الأُسِّيَّةِ

الوحدةُ 1: الأسسُ والمعادلاتُ

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

1. $64 = (16)^{5x+7}$ $-\frac{11}{10}$
2. $49 = (343)^{7x+1}$ $-\frac{1}{21}$
3. $16^{2x+3} = 4^{4x+1}$ $-\frac{5}{3}$
4. $36^{3x-1} = 6^{4x-2}$ 0
5. $125^x = 5 \times \left(\frac{1}{25}\right)^x$ $\frac{1}{5}$
6. $81^x = 3 \times \left(\frac{1}{9}\right)^x$ $\frac{1}{6}$
7. $128^{5-x} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ $\frac{57}{70}$
8. $2^x = \frac{16^{2x}}{32^{x+1}}$ $-\frac{5}{2}$
9. $\frac{3^{x+2}}{9^{2x}} = \frac{27^{2-x}}{3^{1-x}}$ $\frac{5}{8}$
10. $\frac{25^{\frac{1}{2}}}{125^{-x}} = \frac{5^{3x+1}}{25^x}$ $\frac{1}{3}$
11. $\frac{8^{\frac{-1}{3}}}{64^{\frac{4}{3}}} = \frac{4^{\frac{1}{2}}}{32^{2x}}$ $-\frac{1}{5}$
12. $\frac{100^{-\frac{3}{2}}}{1000^{\frac{1}{3}}} = \frac{1000^{-\frac{1}{3}}}{100^{2x}}$ $-\frac{7}{2}$

13. كهرباءُ: تقاسُ شِدَّةُ التيارِ الكهربائيِّ بوحدةِ الأمبيرِ A. إذا كانَتِ العلاقةُ بينَ شِدَّةِ التيارِ I والزمنِ بالثواني t هيَ: $I = 2^{-t}$، فبعدَ كمْ ثانيةً تصبحُ شِدَّةُ التيارِ $0.125\ A$؟ $t = 3$

14. لعبةُ شطرنجَ: حصلَ مُخترعُ لعبةِ الشطرنجِ على مكافأةٍ منَ المَلِكِ، هيَ حبوبٌ منَ القمحِ: حبَّةٌ قمحٍ عنِ المربَّعِ الأولِ في لوحةِ الشطرنجِ، وحبَّتانِ عنِ المربَّعِ الثاني، وأربعُ حبّاتٍ عنِ المربَّعِ الثالثِ، وثماني حبّاتٍ عنِ المربَّعِ الرابعِ، وهكذا. إذا كانَ عددُ حبّاتِ القمحِ التي حصلَ عليْها في المربَّعِ x هوَ 4096، فما قيمةُ x؟ المربع 12

أَحُلُّ أنظمةَ المعادلاتِ الآتيةَ:

15. $125^x \times 25^{-y} = 625$, $4^x \times 2^y = 8$ — $(1.428571, 0.142857)$
16. $16^x \times 2^{2y} = 2048$, $49^x \times 7^y = 16807$ — لا يوجد للنظام حل.
17. $25^x \times 5^y = 125$, $4^{2x} \times 2^{2y} = 64$ — عدد لانهائي من الحلول.
18. $27^x \times 9^{2y} = 81$, $2^{3x} \times 32^y = 128$ — $(1.6, -0.2)$

إجابات صفحة 16:

16) افترض أن عمر شيماء هو x ، وأن عمر ريان هو y:

$$x = y + 4$$
$$x^2 + y^2 = 346$$
$$\Rightarrow (15, 11)$$

أي إن عمر شيماء 15 عامًا، وعمر ريان 11 عامًا.

17) افترض أن الطول هو x، وأن العرض هو y:

$$x = 2y$$
$$x^2 + y^2 = 1.25$$
$$\Rightarrow (1, 0.5)$$

التكلفة = طول المحيط × سعر المتر الواحد= 6.75 دنانير.

18) افترض أن طول ضلع المنطقة المزروعة بالبطاطا هو x.

إذن: يكون طول ضلع المنطقة المزروعة بالطماطم هو: $x + 1$

$$(x + 1)^2 + x^2 = 41$$
$$x^2 + x - 20 = 0$$
$$x = 4$$

أي إن طول ضلع المنطقة المزروعة بالبطاطا هو 4 أمتار، وطول ضلع المنطقة المزروعة بالطماطم هو 5 أمتار.

19) بحل المعادلتين، يتبيَّن عدم وجود حل للنظام؛ ما يعني عدم وصول المياه إلى وحدة الإنارة.

20) عوِّض المعادلة الخطية في المعادلة التربيعية:

$$y = 2x^2 + 3x - 5$$
$$3x + p = 2x^2 + 3x - 5$$
$$2x^2 - (5 + p) = 0$$

المميز يساوي صفرًا؛ لأنه يوجد حل واحد فقط.

إذن:

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = (0)^2 + 4(2)(5+p) = 0$$
$$40 + 8p = 0$$
$$p = -5$$

21) أولًا: حل نظام المعادلات بتعويض المعادلة الخطية في المعادلة التربيعية:

الحل: $(0.85, -1.77), (3.15, 9.77)$.

ثانيًا: اختر ثلاث نقاط عشوائيًّا، بحيث تكون النقاط مُوزَّعة كالآتي:

نقطة بين حلي النظام مثل: $(2, 2)$، ونقطة على يسار الحل الأصغر مثل: $(0, 4)$، ونقطة على يمين الحل الأكبر مثل: $(4, 12)$.

ثالثًا: عوِّض كل نقطة من النقاط الثلاث في المتباينة؛ لتحصل على عبارة صحيحة، فيكون حل النظام هو:

$x < 0.85$ ، أو $x > 3.15$

22)

– مثِّل للطلبة المعادلة $y = x^2$ بيانيًّا، وليكن الرأس: $(0, 0)$.

– اقبل كل المعادلات الخطية، ومثِّلها بيانيًّا، مُحدِّدًا الحالة التي تُحقِّقها، ثم اطلب إلى الطالب حلها جبريًّا.

إرشاد: استعمل برمجية جيوجبرا في حل هذا السؤال.

إجابات صفحة 21:

(أتحقق من فهمي 4):

$$x^2 + y^2 = 16$$
$$3y - x^2 = -12$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

بإعادة الترتيب $-x^2 + 3y = -12$

بجمع المعادلتين $y^2 + 3y = 4$

بإعادة الترتيب $y^2 + 3y - 4 = 0$

بالتحليل $(y + 4)(y - 1) = 0$

خاصية حاصل الضرب الصفري $y = -4, y = 1$

بتعويض $y = 4$ في المعادلة الأولى $x^2 - (-4)^2 = 16$

بالتبسيط $x^2 = 0$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $x = 0$

بتعويض $y = 1$ في المعادلة الأولى $x^2 + (1)^2 = 16$

بالتبسيط $x^2 = 15$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $x = \pm\sqrt{15}$

الحلول الثلاثة، هي: $(0, -4), (\sqrt{15}, 1), (-\sqrt{15}, 1)$

للتحقُّق من صحة الحل، وجِّه الطلبة إلى تعويض كل حل من الحلول الثلاثة في معادلتي النظام، ثم اعرض أمامهم التمثيل البياني المرفق.

8) بجمع المعادلتين

$$+ \quad \begin{matrix} x^2 + y^2 = 16 \\ -x^2 + y = -5 \end{matrix}$$

$$y^2 + y = 11$$
$$y^2 + y - 11 = 0$$
$$y \approx 2.85, y \approx -3.85$$
$$x^2 = 2.85 + 5 = 7.85$$
$$x \approx 2.80, x \approx -2.80$$
$$x^2 = -3.85 + 5 = 1.15$$
$$x \approx 1.07, x \approx -1.07$$
$$(2.80, 2.85), (-2.80, 2.85), (1.07, -3.85), (-1.07, -3.85)$$

10) بطرح المعادلة (1) من (2)

$$\begin{array}{rl} & x^2+(y-2)^2=4 \rightarrow (1) \\ - & x^2+y^2=9 \rightarrow (2) \\ \hline \end{array}$$

$$y^2-(y-2)^2=5$$
$$y^2-y^2+4y-4=5$$
$$4y=9$$
$$y=\frac{9}{4}=2.25$$
$$x^2+(\frac{9}{4})^2=9$$
$$x=\pm\frac{\sqrt{63}}{4}$$
$$x\approx\pm 1.98$$
$$(1.98, 2.25), (-1.98, 2.25)$$

إجابات صفحة 22:

13)

$$x^2+6x=-x^2+24x$$
$$\Rightarrow 2x^2-18x=0$$
$$\Rightarrow x^2-9x=0$$
$$\Rightarrow x(x-9)=0 \qquad x=0 \text{ تهمل}$$
$$\Rightarrow x=0, x=9$$
$$\Rightarrow (9.135)$$

14) افترض أن طول القاعدة هو $2x$، وأن الارتفاع هو y:

$$x^2+y^2=2500 \Rightarrow y=\sqrt{2500-x^2}$$
$$\frac{1}{2}(2x)(y)=1200 \Rightarrow xy=1200 \Rightarrow x\sqrt{2500-x^2}=1200$$
$$\Rightarrow x^2(2500-x^2)=1440000$$
$$\Rightarrow x^4-2500x^2+1440000=0$$
$$u=x^2 \Rightarrow u^2-2500u+1440000=0$$
$$u=\frac{2500\pm\sqrt{490000}}{2} \Rightarrow u=1600, u=900$$
$$x^2=1600 \Rightarrow x=40, y=30$$
$$x^2=900 \Rightarrow x=30, y=40$$

أي إن طول القاعدة = 80 m، والارتفاع= 30 m

أو:

طول القاعدة = 60 m، والارتفاع = 40 m

17)

$$x^2-3xy+2y^2=0 \Rightarrow (x-2y)(x-y)=0$$
$$\Rightarrow x=2y, \text{ or } x=y$$
$$x=y \Rightarrow x^2+xy=x^2+x^2=2x^2=6$$
$$\Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}, y=\pm\sqrt{3}$$

$$x=2y \Rightarrow y=\frac{1}{2}x \Rightarrow x^2+xy=x^2+\frac{1}{2}x^2=\frac{3}{2}x^2=6$$
$$\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2, y=\pm 1$$

الحلول هي: $(\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}), (2, 1), (-2, -1)$

19)

$$x^2+y^2=500$$
$$y=2\pi r \Rightarrow r=\frac{y}{2\pi}$$
$$V=\pi r^2 x=\pi(\frac{y}{2\pi})^2(x)=\frac{y^2x}{4\pi}=\frac{250}{\pi}$$
$$\Rightarrow y^2=\frac{1000}{x}$$
$$\Rightarrow x^2+\frac{1000}{x}=500$$
$$\Rightarrow x^3-500x+1000=0$$

بحل المعادلة

$$x\approx 21.28 \text{ cm}, y\approx 6.85 \text{ cm},$$
$$\text{or } x\approx 2.02 \text{ cm}, y\approx 22.25 \text{ cm},$$
$$\text{or } x\approx -23.30$$

(مرفوض)

إجابات صفحة 28:

20) افترض أن الزمن $= x$.

إذن:

عدد الخلايا البكتيرية هو 7300 عند الزمن $x=0$.

$$y=7300(3)^x$$
$$y=1773900$$

21)

$$\frac{r^{\frac{1}{2}}(r+r^2)}{r(r+r^2)}=r^{\frac{1}{2}-1}$$
$$=r^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{r}}$$

22)

$$\frac{y^{-\frac{1}{2}}(1-2y^{-1})}{y^{\frac{1}{2}}(1-2y^{-1})}=y^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$$
$$=y^{-1}$$
$$=\frac{1}{y}$$

23)

$$\frac{1+x+2x}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1+3x}{2\sqrt{x}}$$

إجابات صفحة 34:

16)

$$y = a(3)^x$$
$$1701 = a(3)^4 \Rightarrow a = 21$$
$$y = 21(x)^x$$
$$x = 0 \Rightarrow y = 21$$

18)

$$y = 3^{t-2}$$
$$2187 = 3^{t-2}$$
$$2187 = \frac{3^t}{3^2}$$
$$\frac{9}{9} \times 2187 = \frac{3^t}{3^2}$$
$$\frac{19683}{9} = \frac{3^t}{9}$$
$$19683 = 3^t$$
$$3^9 = 3^t$$
$$t = 9$$

19) حجم متوازي المستطيلات هو V، والطول ι، والعرض w، والارتفاع h:

$$V = \iota \times w \times h$$

قسِّم الشكل إلى ثلاثة متوازي مستطيلات:

$$\text{المساحة} = 4^{2x-1} \times 2x \times 5^{1+5x} + 8^{x+1} \times 2x \times 5^{1+5x} + 4^{2x+1} \times 2x \times 5^{1+5x}$$

20) لا يوجد حل للمعادلة الأسية؛ لأنه لا يوجد حل للمعادلة:

$$2x = -1$$

21) اضرب طرفي المعادلة في $x^{\frac{1}{2}}$، فتصبح المعادلة:

$$x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$$

وبحلها بالتحليل إلى العوامل، أو باستعمال القانون العام، ينتج:

$$x = 3.1$$

22) بالتحليل إلى العوامل، ينتج:

$$\frac{(2\times2\times3\times3)^{x-y+1}}{(2\times3\times3\times3)^{x+y-1}} = (2\times2\times2\times2\times3)^{x+y}$$
$$2 \rightarrow 2x - 2y + 2 - x - y + 1 = 4x + 4y$$
$$\Rightarrow 3x + 7y = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$3 \rightarrow 2x - 2y + 2 - 3x - 3y + 3 = x + y$$
$$\Rightarrow 2x + 6y = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

بحل النظام الخطي، ينتج:

$$(x, y) = (-4.25, 2.25)$$

23)

$$2^x + 3^y = 2^0 + 3^2$$
$$2^{x+1} + 3^{y+1} = 2^1 + 3^3$$
$$\Rightarrow x = 0, y = 2$$

إجابات (اختبار نهاية الوحدة) صفحة 35:

7) الحل:

$$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (-\frac{3}{2}, 13.5)$$

اختيار ثلاث نقاط عشوائية؛ على أن تقع الأولى بين الحلين، وتكون الثانية أقل من الحل الأول، وتكون الثالثة أكبر من الحل الثاني، فينتج:

$$x > \frac{1}{3}, x < -\frac{2}{3}$$

إجابات (كتاب التمارين) صفحة 7:

17) الحل:

$$x^2 - (p+3)\,x + 8 = 0$$
$$b^2 - 4ac > 0$$
$$(p-3)^2 - 4(1)(8) > 0$$
$$p^2 - 6p - 23 > 0$$
$$(-\infty, 3 - 4\sqrt{2}), (3 - 4\sqrt{2}, 3 + 4\sqrt{2}), (3 + 4\sqrt{2}, \infty)$$
$$p = (3 - 4\sqrt{2}, 3 + 4\sqrt{2})$$