مدارس الكلية العلمية الإسلامية
Islamic Educational College Schools

78th عامًا من التميز والعطاء

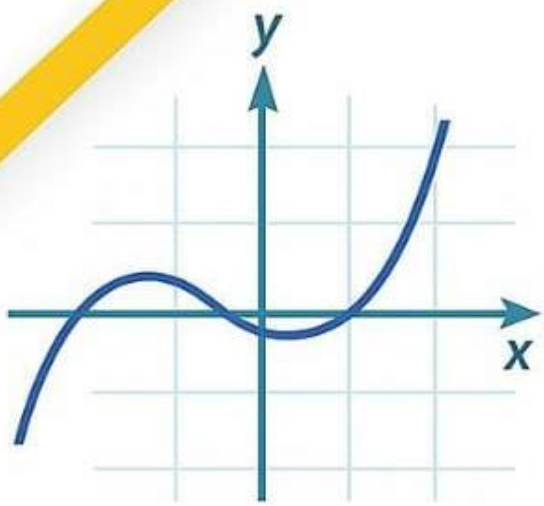
الرياضيات

الصف الحادي عشر (BTEC)

Path to Success

Mathematics

Grade 11

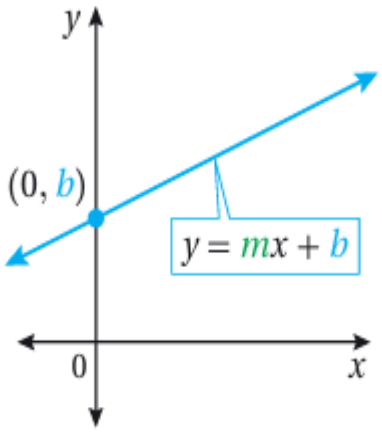


- الاقتران الخطي
  Linear Function
- الاقتران التربيعي
  Quadratic Function
- حل المعادلات التربيعية
  Solving Quadratic Equations

الدرسُ
1

الاقتراناتُ
Functions

رمزُ الاقترانِ والاقترانُ الخطيُّ



يُبيّنُ الشكلُ المُجاورُ التمثيلَ البيانيَّ لمُعادلةٍ خطيَّةٍ بمُتغيِّرينِ، وقَدْ تعلَّمتُ سابقًا كتابَتَها باستعمالِ صيغةِ الميلِ والمقطعِ عَلى الصورة: $y = mx + b$؛ حيثُ m هوَ ميلُ المُستقيمِ وَ b المقطعُ y لهُ. وبما أنَّ التمثيلَ البيانيَّ لهذهِ المعادلةِ يجتازُ اختبارَ الخطِّ الرأسيِّ فإنَّها تُعَدُّ اقترانًا، وَيُسَمّى **اقترانًا خطيًّا** (linear function).

يمكنُ أيضًا كتابةُ قاعدةِ الاقترانِ الخطيِّ باستعمالِ رمزِ الاقترانِ $f(x)$ على الصورةِ الآتيةِ:

$$f(x) = mx + b$$

وتمثّلُ قِيَمُ x عناصرَ مجالِ الاقترانِ f، أمّا قِيَمُ $f(x)$ فتمثّلُ عناصرَ مَداهُ.

لغةُ الرِّياضياتِ

يُقرَأُ الرَّمزُ $f(x)$:

f of x

مثال 1

إذا كانَ $f(x) = 2x + 6$، فَأُجيبُ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ تِباعًا:

1 أَجِدُ $f(3)$

الاقترانُ المُعطى	$f(x) = 2x + 6$
بتعويضِ $x = 3$	$f(3) = 2(3) + 6$
بالتبسيطِ	$= 12$

2 أَجِدُ $f(-4) + 10$

بتعويضِ $x = -4$	$f(-4) + 10 = (2(-4) + 6) + 10$
بالتبسيطِ	$= -2 + 10$
بالتبسيطِ	$= 8$

3 أَجِدُ قيمةَ x التي تجعلُ $f(x) = -10$

الاقترانُ المُعطى	$f(x) = 2x + 6$
بتعويضِ $f(x) = -10$	$-10 = 2x + 6$
بطرحِ 6 مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ	$-16 = 2x$
بقسمةِ طرفَيِ المُعادلةِ على 2	$x = -8$

إذنْ، عندما $x = -8$، فإنَّ $f(x) = -10$

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

إذا كانَ $g(x) = 10 - x$، فَأَجيبُ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ تِباعًا:

a) أَجِدُ $g(-5)$

b) أَجِدُ $g(3) + 6$

c) أَجِدُ قيمةَ x التي تجعلُ $g(x) = -35$

أتدرّبُ وأحُلُّ المسائل

إذا كانَ $f(x) = 3x - 8$، فأَجِدُ:

1. $f(-3)$

2. $2f(5) - 11$

3. قيمةَ x، التي تجعلُ $f(x) = 19$

الدرس 2

تمثيلُ الاقترانِ الخطّيِّ بيانيًّا

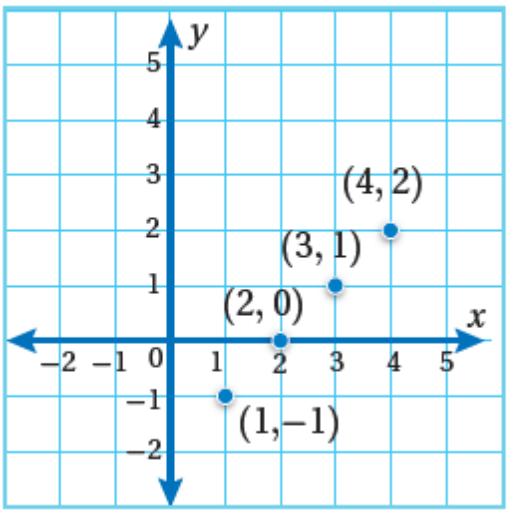
التمثيلُ البيانيُّ للمعادلةِ الخطيّةِ هو مستقيمٌ يمرُّ في الأزواجِ المُرتّبةِ جميعِها التي تمثّلُ حلولاً للمعادلةِ، وأيُّ زوجٍ مرتَّبٍ يقعُ على هذا المستقيمِ يمثّلُ حلًّا للمعادلةِ.

مثال 1

أجدُ أربعةَ حُلولٍ للمُعادلةِ $y = x - 2$ ثمَّ أمثّلُها بيانيًّا على المستوى الإحداثيِّ.

أختارُ 4 قِيَمٍ للمُدخلاتِ ولتكُنْ 1, 2, 3, 4 ثمَّ أجدُ قيمَ المُخرَجاتِ المناظِرةِ لها باستخدامِ المعادلةِ.

x	$x-2$	y	(x, y)
1	$1-2$	-1	$(1, -1)$
2	$2-2$	0	$(2, 0)$
3	$3-2$	1	$(3, 1)$
4	$4-2$	2	$(4, 2)$

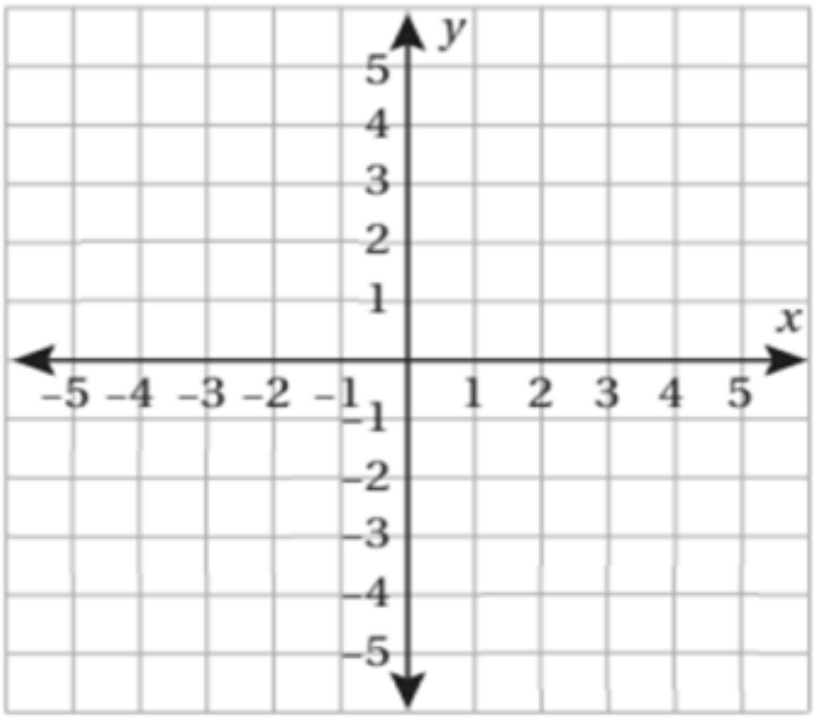


يمثّلُ كلُّ زوجٍ مرتَّبٍ في الجدولِ حلًّا للمعادلةِ $y = x - 2$ ، وعندَ تمثيلِ هذهِ الأزواجِ المرتبةِ على المستوى الإحداثيِّ فإنَّنا نحصلُ على جزءٍ منَ التمثيلِ البيانيِّ للمعادلةِ؛ وذلكَ لأنَّ للمعادلةِ حلولاً أخرى غيرَ هذهِ التي أوْجدْناها في الجدولِ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أجدُ أربعةَ حلولٍ للمعادلةِ $y = x - 3$، ثمَّ أمثِّلُها بيانِيًّا على المستوى الإحداثيِّ.

x	y = x - 3	(x , y)
1		
2		
3		
4		

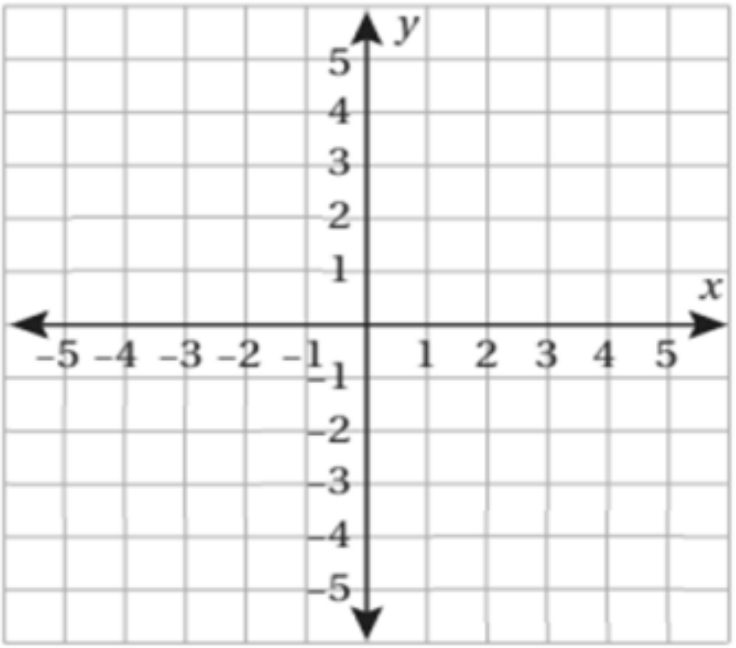


أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائل

أجِدُ أربعةَ حلولٍ لكلِّ معادلةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أمثِّلُها بيانِيًّا على المستوى الإحداثيِّ.

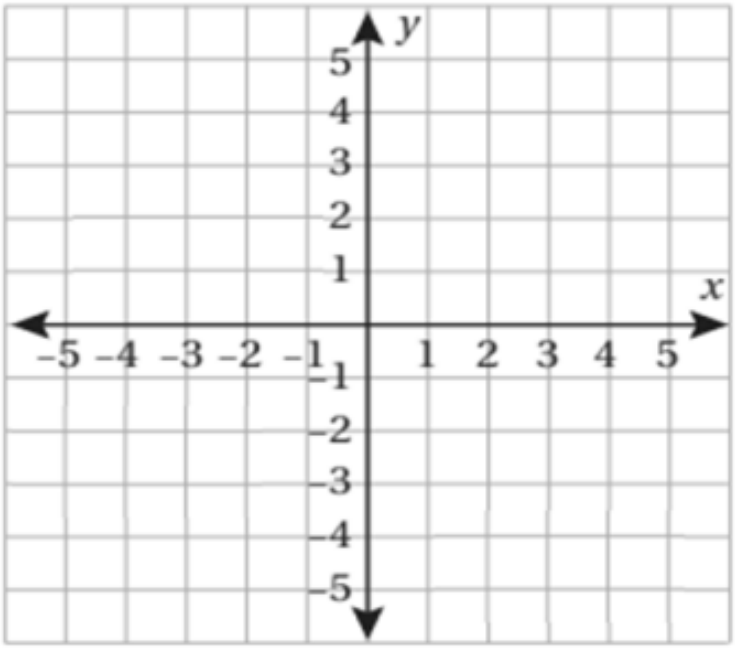
1 $y = x + 1$

x	y = x + 1	(x , y)
1		
2		
3		
4		



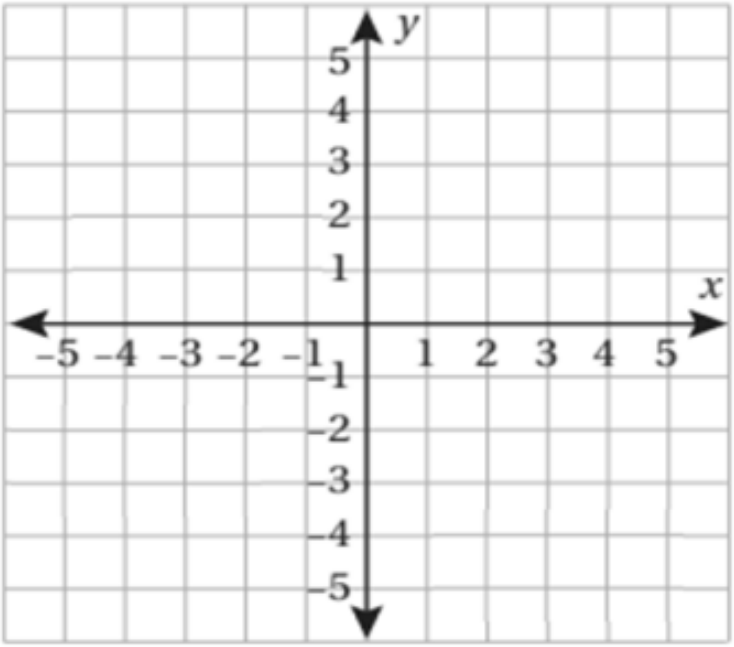
2 $y = 4x - 3$

x	y = 4x – 3	(x , y)
1		
2		
3		
4		



3 $y = 3 - 2x$

x	y = 3 – 2x	(x , y)
1		
2		
3		
4		



الدرسُ
3

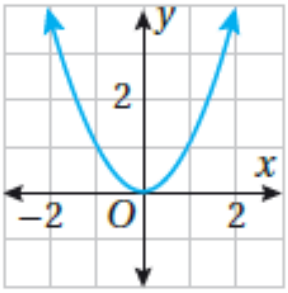
الاقترانُ التربيعيُّ
Quadratic Function

خصائصُ الاقترانِ التربيعيِّ

الاقترانُ التربيعيُّ (quadratic function) اقترانٌ يمكنُ كتابتُهُ عَلى الصورةِ $f(x) = ax^2 + bx + c$؛ حيثُ a و b و c أعدادٌ حقيقيَّةٌ، وَ $a \neq 0$، الّتي تُسَمّى **الصورةَ القياسيَّةَ** (standard form) للاقترانِ التربيعيِّ، وَمِنْ أمثلتِهِ:

$$f(x) = 4x^2 + 3x + 1 \qquad g(x) = x^2 - 2x \qquad h(x) = 3x^2$$

يُعَدُّ الاقترانُ $f(x) = x^2$ أبسطَ صورِ الاقترانِ التربيعيِّ؛ لِذا يُسَمّى **الاقترانَ الرئيسَ** (parent function) لعائلةِ الاقتراناتِ التربيعيَّةِ.



يأخذُ التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ التربيعيِّ شكلَ الحرفِ الإنجليزيِّ U، وَيُسَمّى **قطعًا مُكافِئًا** (parabola)، كما في الشكلِ المُجاورِ، الذي يُظهِرُ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ $f(x) = x^2$.

محورُ التَّماثُلِ (axis of symmetry) هُوَ المُستقيمُ الرأسيُّ الذي يقسِمُ القطعَ المُكافِئَ إلى جُزأيْنِ مُتطابقَيْنِ، ويقطعُهُ في نقطةٍ واحدةٍ تُسَمّى **الرأسَ** (vertex).

يكونُ التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ التربيعيِّ $f(x) = ax^2 + bx + c$؛ حيثُ $a \neq 0$، مفتوحًا للأعلى إذا كانَ $a > 0$، ويكونُ مفتوحًا للأسفلِ إذا كانَ $a < 0$

مثال 1

أَجِدُ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ، وإحداثِيَّيْ رأسِ الاقترانِ التربيعيِّ $f(x) = 5x^2 - 10x + 4$

بما أنَّ $a = 5$ و $b = -10$، فيمكنُ إيجادُ مُعادلةِ محورِ التَّماثُلِ كالآتي:

مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ $x = -\frac{b}{2a}$

بتعويضِ $a = 5, b = -10$ $= -\frac{-10}{2(5)}$

بالتبسيطِ $= 1$

إذنْ، مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ هِيَ: $x = 1$

لإيجادِ إحداثِيِّ الرأسِ، أعدُّ القيمةَ الناتجةَ عَنْ مُعادلةِ محورِ التَّماثُلِ هِيَ الإحداثيُّ x لرأسِ القطعِ المُكافِئِ، ثمَّ أعوّضُها في قاعدةِ الاقترانِ لإيجادِ الإحداثيِّ y.

الاقترانُ المُعطى $f(x) = 5x^2 - 10x + 4$

بتعويضِ $x = 1$ $f(1) = 5(1)^2 - 10(1) + 4$

بالتبسيطِ $= -1$

إذنْ، إحداثِيّا الرأسِ $(1, -1)$

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أَجِدُ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ، وإحداثِيَّيْ رأسِ الاقترانِ التربيعيِّ $f(x) = x^2 + 2x - 1$

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائل

أَجِدُ إحداثيّي الرأسِ ومعادلةَ محورِ التماثلِ، واتِّجاهَ الفتحةِ لِكُلِّ قطعٍ مُكافِئٍ ممّا يأتي:

1 $f(x) = x^2 + 3$

2 $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$

تمثيلُ الاقترانِ التربيعيّ بيانيًّا

يمكنُ استعمالُ خصائصِ الاقترانِ التربيعيِّ لتمثيلِهِ بيانيًّا.

مثال 2

أمثّلُ الاقترانَ: $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$ بيانيًّا.

الخطوةُ 1: أحــدّدُ اتّجاهَ فتحةِ القطعِ المُكافِئِ، وَأَجِدُ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ وإحداثِيَّي الرأسِ.

في الاقترانِ $f(x)$: $a = -3, b = 6$

بمــا أنَّ $a < 0$، فالتمثيلُ البيانيُّ للقطعِ المُكافِئِ يكونُ مفتوحًا للأســفلِ

- أَجِدُ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ.

مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ $x = -\frac{b}{2a}$

بتعويضِ $a = -3, b = 6$ $= -\frac{6}{2(-3)}$

بالتبسيطِ $= 1$

إذنْ، مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ هِيَ $x = 1$.

- أَجِدُ إحداثِيَّيِ الرأسِ.

الاقترانُ المُعطى $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$

بتعويضِ $x = 1$ $f(1) = -3(1)^2 + 6(1) + 5$

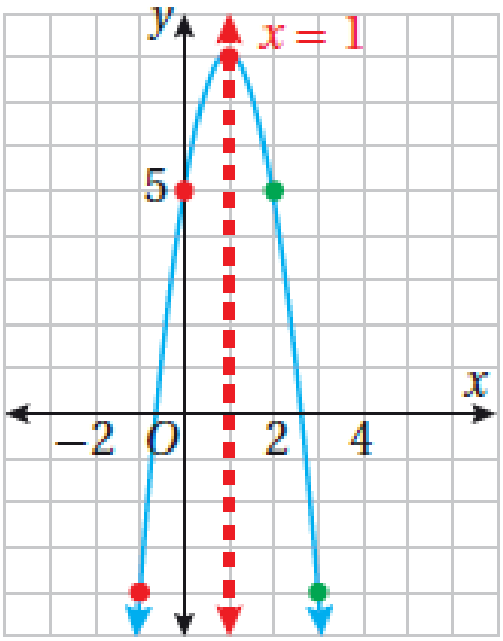
بالتبسيطِ $= 8$

إذنْ، إحداثِيّا الرأسِ $(1, 8)$.

الخطوةُ 2: كون الجدول الآتي:

x	-1	0	1	2	3
f(x)	-4	5	8	5	-4

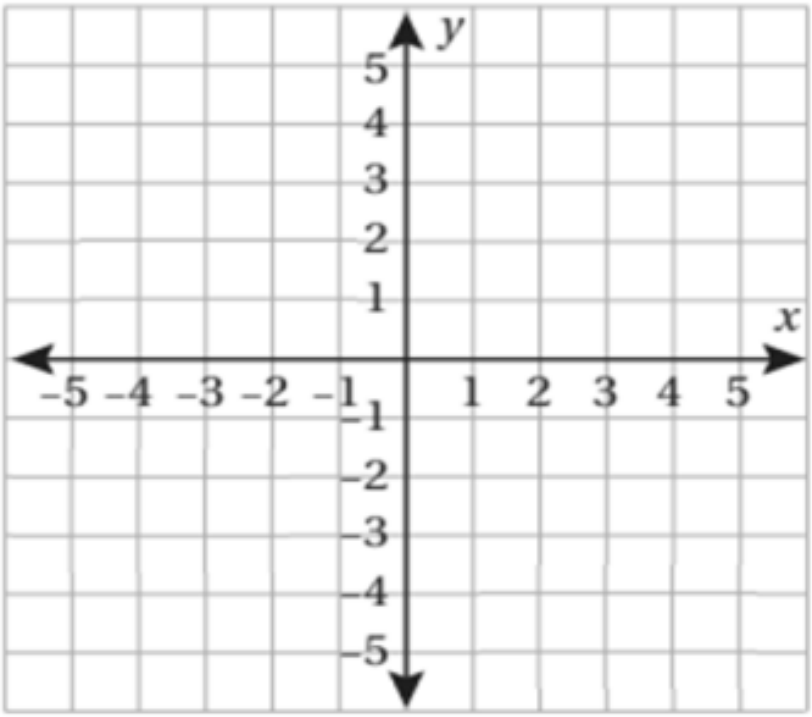
الخطوةُ 3: أمثّلُ النقاطَ في المُستوى الإحداثيِّ.وأصِلُ بينَ النقاطِ بِمُنحنًى أملَسَ.



أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أمثّلُ الاقترانَ: $f(x) = x^2 - 4x - 5$

x					
y					

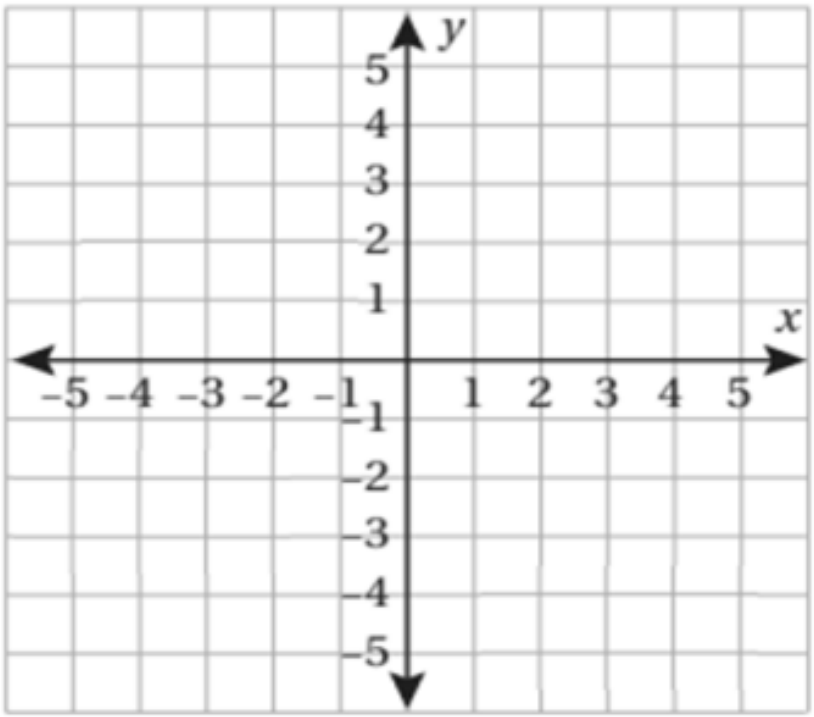


أتدرّبُ وأحُلُّ المسائل

أمثّلُ كُلًّا مِنَ الاقترانات الآتيةِ بيانيًّا:

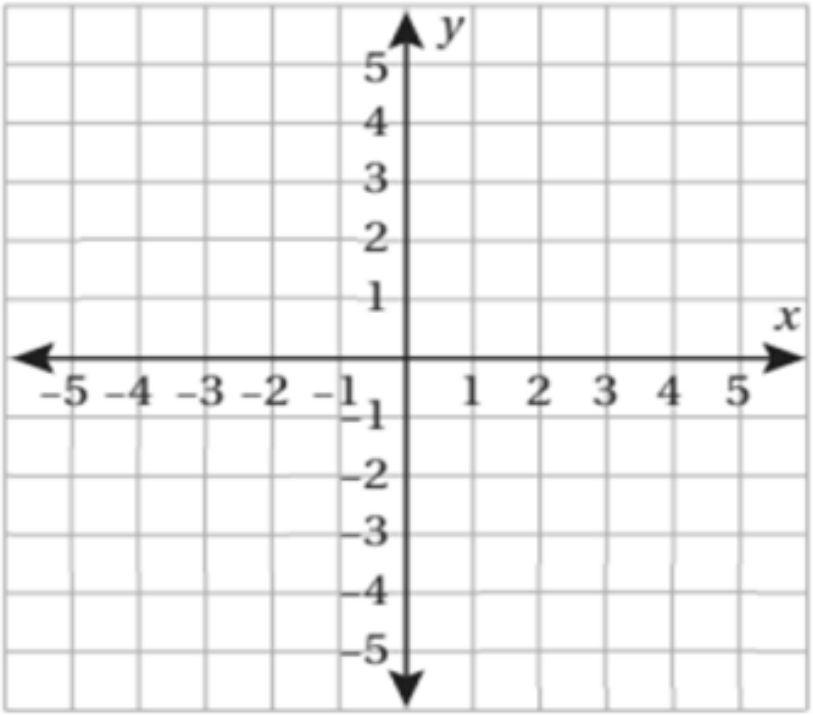
1 $f(x) = x^2 - 4x + 1$

x					
y					



2 $f(x) = -x^2 + 3$

x					
y					



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

أكتشـــفُ الخطأَ: حاولَ هشـــامٌ وَمَلَكُ إيجادَ مُعادلةِ محورِ التَّماثُلِ للقطـــعِ المُكافِئِ $f(x) = -2x^2 - 16x + 7$، فكانَتْ إجابَتاهُما كالآتي. أيُّهُما إجابتُهُ صحيحةٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

هشامٌ

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{2(-2)}$$

$$x = 4$$

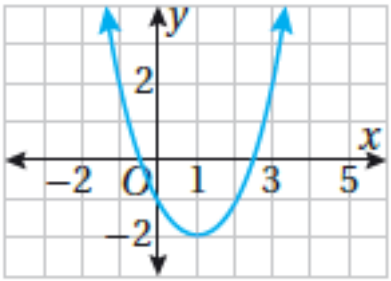
مَلَكُ

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-16)}{2(-2)}$$

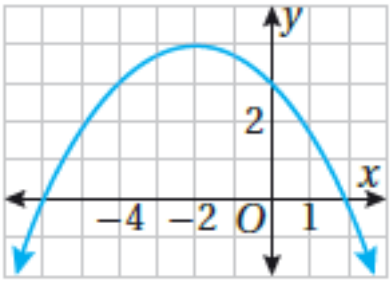
$$x = -4$$

أَجِدُ إحداثيّي الرأسِ ومعادلةَ محورِ التماثلِ كلٍّ مِنَ القطوعِ المُكافِئةِ الآتيةِ :

1



2



الدرسُ 4

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ

Solving Quadratic Equations by Factoring

مفهومٌ أساسيٌّ

حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ

لحلِّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ، أتّبعُ الخُطواتِ الآتيةَ:

الخُطوةُ 1: أنقلُ جميعَ الحدودِ إلى الطرفِ الأيسرِ مِنَ المُعادلةِ، وأتركُ الصِّفرَ في الطرفِ الأيمنِ.

الخُطوةُ 2: أحلّلُ المقدارَ الجبريَّ في الطرفِ الأيسرِ مِنَ المُعادلةِ على صورةِ حاصلِ ضربِ عامِلَيْنِ.

الخُطوةُ 3: أُساوي كلَّ عاملٍ بالصِّفرِ (خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ)، وَأَحُلُّ كلَّ مُعادلةٍ خطيَّةٍ.

الخُطوةُ 4: حلولُ المُعادلةِ التربيعيَّةِ هِيَ حلولُ المعادلتَينِ الخطّيّتَينِ.

أتذكَّرُ

إخراجُ العاملِ المُشتَرَكِ الأكبرِ لِحدودِ مقدارٍ جبريٍّ هِيَ عمليَّةٌ عكسيَّةٌ لعمليَّةِ التوزيعِ.

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ: إخراجُ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ

تعلَّمتُ سابقًا أنَّهُ يمكنُ تحليلُ المقدارِ الجبريِّ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ لِحُدودِهِ، ويمكنُ استعمالُ هذهِ الطريقةِ مِنَ التحليلِ لحلِّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ، كما في المثالِ الآتي:

مثال 1

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^2 = -5x$

المُعادلةُ المُعطاةُ	$x^2 = -5x$
بجمعِ $5x$ إلى طرفَيِ المُعادلةِ	$x^2 + 5x = 0$
بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ	$x(x + 5) = 0$
خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ	$x = 0 \quad \text{or} \quad x + 5 = 0$
بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ	$x = -5$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $0, -5$

2 $6x^2 = 20x$

$6x^2 = 20x$	المُعادلةُ المُعطاةُ
$6x^2 - 20x = 0$	بطرحِ $20x$ مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ
$2x(3x - 10) = 0$	بإخراجِ العاملِ المُشتَرَكِ الأكبرِ
$2x = 0 \quad \text{or} \quad 3x - 10 = 0$	خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ
$x = 0 \qquad x = \frac{10}{3}$	بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذنْ، الجذرانِ هُما: $0, \frac{10}{3}$

التحقُّقُ: أعوّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

a) $x^2 - 3x = 0$

b) $8x^2 = -12x$

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ: الصورةُ القياسيَّةُ $x^2 + bx + c = 0$

إذا كانَ المقدارُ الجبريُّ $x^2 + bx + c$ قابلًا للتحليلِ، فيمكنُ أيضًا استعمالُ خاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ لحلِّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ المكتوبةِ بالصورةِ القياسيَّةِ $x^2 + bx + c = 0$.

أتذكَّرُ

لتحليلِ ثلاثيٍّ حدودٍ على الصورةِ $x^2 + bx + c$، أبحثُ عنْ عددَيْنِ صحيحَيْنِ m وَ n مجموعُهُما يُساوي b، وحاصلُ ضربِهِما يُساوي c، ثمَّ أكتبُ x^2+bx+c على الصورةِ $(x+m)(x+n)$.

مثال 2

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^2 + 6x + 8 = 0$

$x^2 + 6x + 8 = 0$	المُعادلةُ المُعطاةُ
$(x + 4)(x + 2) = 0$	بالتحليلِ إلى العواملِ
$x + 4 = 0 \quad \text{or} \quad x + 2 = 0$	خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ
$x = -4 \qquad x = -2$	بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذنْ، الجذرانِ هُما: $-4, -2$

التحقُّقُ: أعوِّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

أتذكَّرُ

بما أنَّ $b = 6, c = 8$، فأبحثُ عنْ عددَيْنِ صحيحَيْنِ موجبَيْنِ مجموعُهُما 6 وحاصلُ ضربِهِما 8

3 $x^2 + 5x = 6$

$x^2 + 5x = 6$	المُعادلةُ المُعطاةُ
$x^2 + 5x - 6 = 0$	بطرحِ 6 مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ
$(x - 1)(x + 6) = 0$	بالتحليلِ إلى العواملِ
$x - 1 = 0 \quad \text{or} \quad x + 6 = 0$	خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ
$x = 1 \qquad x = -6$	بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذنْ، الجذرانِ هُما: $1, -6$

التحقُّقُ: أعوِّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

أتذكَّرُ

بما أنَّ $b = 5, c = -6$، فأبحثُ عنْ عددَيْنِ صحيحَيْنِ مُختلِفَيْنِ في الإشارةِ مجموعُهُما 5 وحاصلُ ضربِهِما -6

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

a) $x^2 + 7x = -6$

b) $x^2 - 9x + 8 = 0$

c) $x^2 - 4x - 21 = 0$

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ: تحليلُ الفرقِ بينَ مُرَبَّعَيْنِ

يمكنُ استعمالُ خاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ والتحليلِ لحلِّ مُعادلاتٍ تربيعيَّةٍ تتضمَّنُ فرقًا بينَ مربّعَينِ في أحدِ طرفَيْها، وصفرًا في طرفِها الآخَرِ.

أتذكَّرُ

الفرقُ بينَ مربّعَيْ حَدَّيْنِ يُساوي ناتجَ ضربِ مجموعِ الحَدَّيْنِ في الفرقِ بينَهُما.

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

مثال 3

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^2 - 36 = 0$

$x^2 - 36 = 0$	المُعادلةُ المُعطاةُ
$(x - 6)(x + 6) = 0$	بتحليلِ الفرقِ بينَ مربّعَينِ
$x - 6 = 0 \quad \text{or} \quad x + 6 = 0$	خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ
$x = 6 \qquad x = -6$	بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذنْ، الجذرانِ هُما: $6, -6$

التحقُّقُ: أعوّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

أتذكَّرُ

يحتاجُ تحليلُ بعضِ المقاديرِ الجبريَّةِ إلى إجراءِ خُطوتَيْنِ، مثلِ: إخراجِ العاملِ المُشتَرَكِ الأكبرِ للحدودِ جميعِها، ثمَّ تحليلِ ما تبقّى مِنَ المقدارِ باستعمالِ تحليلِ الفرقِ بينَ مربّعَيْنِ، أوْ تحليلِ العبارةِ التربيعيةِ.

2 $8x^2 - 50 = 0$

$8x^2 - 50 = 0$	المُعادلةُ المُعطاةُ
$4x^2 - 25 = 0$	بقسمةِ طرفَيِ المُعادلةِ على 2
$(2x - 5)(2x + 5) = 0$	بتحليلِ الفرقِ بينَ مربّعَينِ
$2x-5 = 0 \quad \text{or} \quad 2x+5 = 0$	خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ
$x = \frac{5}{2} \qquad x = -\frac{5}{2}$	بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذنْ، الجذرانِ هُما: $\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}$

التحقُّقُ: أعوّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

a) $4x^2 - 1 = 0$

b) $2x^2 - 18 = 0$

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ باستعمالِ الجذرِ التربيعيِّ

تعلَّمتُ سابقًا أنَّهُ يمكنُ حلُّ المُعادلاتِ على الصورةِ $x^2 = c$؛ حيثُ $c \geq 0$، باستعمالِ تعريفِ الجذرِ التربيعيِّ للعددِ الموجبِ؛ حيث: $x = \pm\sqrt{c}$، أمّا إذا لمْ تَكُنِ المُعادلةُ التربيعيَّةُ مكتوبةً على الصورةِ $x^2 = c$، فأستعملُ العملياتِ الجبريَّةَ لكتابةِ x^2 وحدَهُ في أحدِ طرفَيِ المُعادلةِ أوَّلًا، إنْ أمكَنْ، ثمَّ أَحُلُّ المُعادلةَ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لكلِّ طرفٍ.

مثال 4

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $3x^2 - 27 = 0$

$3x^2 - 27 = 0$	المُعادلةُ المُعطاةُ
$3x^2 = 27$	بجمعِ 27 إلى طرفَيِ المُعادلةِ
$x^2 = 9$	بقسمةِ طرفَيِ المُعادلةِ على 3
$x = \pm\sqrt{9}$	بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَيْنِ
$x = \pm 3$	بالتبسيطِ

إذنْ، الجذرانِ هُما: $-3, 3$

التحقُّقُ: للتحقُّقِ، أعوّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

أُفكِّرُ

هلْ يمكنُ حلُّ الفرعِ 1 مِنَ المثالِ 5 بطريقةٍ أُخرى؟

2 $(x+4)^2 = 49$

$(x+4)^2 = 49$	المُعادلةُ المُعطاةُ
$x + 4 = \pm\sqrt{49}$	بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَيْنِ
$x + 4 = \pm 7$	بالتبسيطِ
$x = -4 \pm 7$	بطرحِ 4 مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ
$x = -4 + 7$ or $x = -4 - 7$	بفصلِ الحَلَّيْنِ
$x = 3$ or $x = -11$	بالتبسيطِ

إذنْ، الجذرانِ هُما: $3, -11$

التحقُّقُ: للتحقُّقِ، أعوّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

a) $4x^2 - 100 = 0$

b) $(x - 1)^2 = 16$

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1) $4x^2 + 9x = 0$

2) $7x^2 = 6x$

3) $x^2 + 5x + 4 = 0$

4 $x^2 - 2x - 15 = 0$

5 $t^2 - 8t + 16 = 0$

6 $x^2 - 18x = -32$

7 $x^2 - 9 = 0$

8 $x^2 - 25 = 0$

9 $2m^2 = 50$

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

أكتشِفُ الخطأَ: حلَّ سلمانُ ومهنَّدٌ المُعادلةَ التربيعيَّةَ $x^2 - 3x - 4 = 0$، كما هُوَ مُبيَّنٌ أدناهُ. أيُّهما إجابتُهُ صحيحةٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

سلمانُ

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$(x - 4)(x + 1) = 0$$
$$x - 4 = 0 \quad \text{or} \quad x + 1 = 0$$
$$x = 4 \qquad x = -1$$

مهنَّدٌ

$$x(x - 3) = 4$$
$$x = 4 \quad \text{or} \quad x - 3 = 4$$
$$x = 7$$

الدرسُ 5

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ

Solving Quadratic Equations Using the Quadratic Formula

مفهومٌ أساسيٌّ

حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بالقانونِ العامِّ

يمكـــنُ إيجادُ الحلّينِ الحقيقيَّينِ للمعادلةِ التربيعيـــةِ $ax^2 + bx + c = 0$ بالقانونِ العامِّ على النَّحوِ الآتي:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيثُ $a \neq 0$ و $b^2 - 4ac \geq 0$.

مثال 1

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بالقانونِ العامِّ، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ (إنْ لَزِمَ):

1 $2x^2 - 3x = 5$

الخُطوةُ 1: أكتبُ المُعادلةَ بالصورةِ القياسيَّةِ.

المُعادلةُ المُعطاةُ	$2x^2 - 3x = 5$
بطرحِ 5 مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ	$2x^2 - 3x - 5 = 0$

الخُطوةُ 2: أطبّقُ القانونَ العامَّ.

صيغةُ القانونِ العامِّ	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
بتعويضِ $a = 2, b = -3, c = -5$	$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)}$
بالتبسيطِ	$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4}$
بالجمعِ، ثمَّ إيجادِ الجذرِ التربيعيِّ	$= \frac{3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4}$
بفصلِ الحلَّيْنِ	$x = \frac{3 - 7}{4}$ or $x = \frac{3 + 7}{4}$
بالتبسيطِ	$x = -1$ $\quad$ $x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ هُما $-1, \frac{5}{2}$

2 $5x^2 - 11x = 4$

الخُطوةُ 1: أكتبُ المُعادلةَ بالصورةِ القياسيَّةِ.

المُعادلةُ المُعطاةُ $5x^2 - 11x = 4$

بطرحِ 4 مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ $5x^2 - 11x - 4 = 0$

الخُطوةُ 2: أطبّقُ القانونَ العامَّ.

صيغةُ القانونِ العامِّ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بتعويضِ $a = 5, b = -11, c = -4$ $= \dfrac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(5)(-4)}}{2(5)}$

بالتبسيطِ $= \dfrac{11 \pm \sqrt{121 + 80}}{10}$

بالجمعِ $= \dfrac{11 \pm \sqrt{201}}{10}$

بفصلِ الحلَّيْنِ $x = \dfrac{11 - \sqrt{201}}{10}$ or $x = \dfrac{11 + \sqrt{201}}{10}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $x \approx -0.3$ $x \approx 2.5$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ التقريبيّانِ $-0.3, 2.5$

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بالقانونِ العامِّ، مُقَرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ (إنْ لَزِمَ):

a) $3x^2 + 16x = -5$

b) $x^2 - 2x = 4$

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بالقانونِ العامِّ، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ (إنْ لَزِمَ):

1. $2x^2 + x - 8 = 0$
2. $3x^2 + 5x + 1 = 0$
3. $x^2 - x - 10 = 0$

المُمَيِّزُ

تعلَّمتُ سابقًا أنَّ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ حلَّيْنِ حقيقيَّيْنِ مختلفَيْنِ، أوْ حلًّا حقيقيًّا واحدًا، أوْ لا توجدُ لها حُلولٌ حقيقيَّةٌ، ويمكنُ تحديدُ عددِ الحُلولِ الحقيقيَّةِ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ قبلَ حلِّها باستعمالِ **المُمَيِّزِ** (discriminant)، وَهُوَ المقدارُ التربيعيُّ الذي يقعُ أسفلَ الجذرِ التربيعيِّ في القانونِ العامِّ $(b^2 - 4ac)$، وَيُرمَزُ إليهِ بالرَّمزِ Δ.

رُموزٌ رياضيَّةٌ

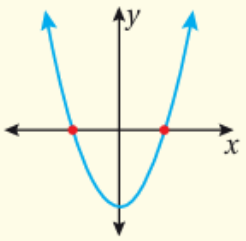
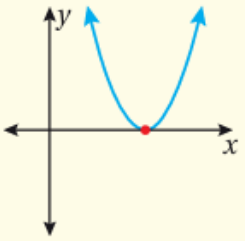
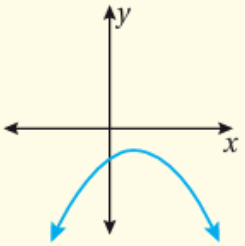
الرَّمزُ Δ إغريقيٌّ، وَيُقْرَأُ دلتا.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ ← المُمَيِّزُ

مفهومٌ أساسيٌّ

استعمالُ المُمَيِّزِ

مُمَيِّزُ المُعادلةِ التربيعيَّةِ $ax^2 + bx + c = 0$ هُوَ $\Delta = b^2 - 4ac$، ويمكنُ استعمالُهُ لتحديدِ عددِ حلولِ المُعادلةِ التربيعيَّةِ كما يأتي:

إشارةُ المُمَيِّزِ Δ	$\Delta > 0$ موجبٌ	$\Delta = 0$ صفرٌ	$\Delta < 0$ سالبٌ
عددُ الحُلولِ	حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ	حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ	لا توجدُ حُلولٌ حقيقيَّةٌ
مثالٌ بيانيٌّ			

مثال 2

أحدّدُ عددَ الحُلولِ الحقيقيَّةِ لكلِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ ممّا يأتي باستعمالِ المُمَيِّزِ:

1 $x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ صيغةُ المُمَيِّزِ

$= (-4)^2 - 4(1)(3)$ بتعويضِ $a = 1, b = -4, c = 3$

$= 4$ بالتبسيطِ

بما أنَّ $\Delta > 0$، إذنْ للمُعادلةِ حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ.

2 $x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ صيغةُ المُمَيِّزِ

$= (-2)^2 - 4(1)(1)$ بتعويضِ $a = 1, b = -2, c = 1$

$= 0$ بالتبسيطِ

بما أنَّ $\Delta = 0$، إذنْ للمُعادلةِ حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ.

3 $x^2 - x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ صيغةُ المُمَيِّزِ

$= (-1)^2 - 4(1)(1)$ بتعويضِ $a = 1, b = -1, c = 1$

$= -3$ بالتبسيطِ

بما أنَّ $\Delta < 0$، إذنْ ليسَ للمُعادلةِ أيُّ حلٍّ حقيقيٍّ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أحدّدُ عددَ الحُلولِ الحقيقيَّةِ لكلِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ ممّا يأتي باستعمالِ المُمَيِّزِ:

a) $-x^2 + 4x - 4 = 0$ **b)** $2x^2 + 8x - 3 = 0$ **c)** $x^2 - 6x + 11 = 0$

أتدرّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أحدّدُ عددَ الحُلولِ الحقيقيَّةِ لكلِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ ممّا يأتي باستعمالِ المُمَيِّزِ:

1. $x^2 - 6x + 10 = 0$
2. $2x^2 - 12x = -18$
3. $-5x^2 + 8x + 9 = 0$